



Couplage de modèles de dimensions hétérogènes et application en hydrodynamique

Manel Tayachi

► To cite this version:

Manel Tayachi. Couplage de modèles de dimensions hétérogènes et application en hydrodynamique. Mathématiques générales [math.GM]. Université de Grenoble, 2013. Français. NNT : 2013GRENM031 . tel-00930084

HAL Id: tel-00930084

<https://theses.hal.science/tel-00930084>

Submitted on 14 Jan 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

Spécialité : **Mathématiques Appliquées**

Arrêté ministériel : 7 août 2006

Présentée par

Manel Tayachi

Thèse dirigée par **Eric BLAYO**
et codirigée par **Antoine ROUSSEAU**

préparée au sein **INRIA Rhône-Alpes et Laboratoire Jean Kuntzmann**
et de l'école doctorale **MSTII : Mathématiques, Sciences et Technologies de l'Information, Informatique**

Couplage de modèles de dimensions hétérogènes et application en hydrodynamique

Thèse soutenue publiquement le **28 octobre 2013**,
devant le jury composé de :

Martin J. GANDER

Professeur, Université de Genève, Rapporteur

Edwige GODLEWSKI

Professeur, Université Pierre et Marie Curie Paris 6, Rapporteur

Emmanuel AUDUSSE

Maître de conférences, Université Paris 13, Examineur

Luca FORMAGGIA

Professeur, Politecnico di Milano, Président

Nicole GOUTAL

Chercheur sénior, EDF R&D, Examineur

Véronique MARTIN

Maître de conférences, Université de Picardie, Examineur

Eric BLAYO

Professeur, Université Joseph Fourier, Directeur de thèse

Antoine ROUSSEAU

Chargé de recherche, INRIA, Co-Directeur de thèse



À mon petit Chams, que ta lumière illumine toujours mon ciel...
À mon mari Yvan...

Remerciement

Je tiens tout d'abord à remercier mes deux directeurs de thèse Eric Blayo et Antoine Rousseau pour m'avoir confié ce travail de recherche dans lequel je me suis pleinement épanouie, pour leur confiance, pour leur aide, pour leur amitié et pour leur soutien. C'était un réel plaisir de travailler avec eux.

J'aimerais ensuite remercier Nicole Goutal pour notre collaboration, pour nos différents échanges et pour tous les séjours que j'ai passés au site de EDF R&D à Chatou.

Merci également à tous les membres de jury d'avoir accepté d'évaluer mon travail. En particulier, je voudrais remercier les rapporteurs Edwige Godlewski et Martin Gander pour leurs retours et remarques.

Merci à Luca Formaggia qui m'a fait l'honneur de présider le jury et à Véronique Martin et Emmanuel Audusse pour les différents échanges que j'ai eus avec eux, et vivement nos prochaines collaborations.

Je voudrais ensuite remercier Franck Pérignon, pour son aide précieuse et pour sa patience avec TELEMAT... Merci à toute l'équipe informatique du LJK et à tous les ingénieurs et chercheurs EDF que j'ai pu solliciter sur la partie numérique.

J'ai eu la chance de travailler ces trois années de thèse au sein de l'équipe MOISE. Merci donc à tous les membres de cette équipe, avec une mention très spéciale pour notre assistance Anne ainsi que pour les anciens, en particulier Franck Vigilant. Je voudrais aussi remercier les chercheurs invités que j'ai pu côtoyer, et spécialement Robert Miller et Victor Shutyaev.

Mes remerciements vont ensuite vers tous les collègues du LJK avec qui j'ai eu des débats scientifiques (ou non) passionnants et surtout aux personnes avec qui j'ai partagé les repas de midi et les pauses café au 7ème étage : Frédéric, Caroline, Bruno, Laurence, Stéphane, Frédérique, Faouzi et Luc.

La vie d'un doctorant ne devient belle que si elle est partagée avec d'autres doctorants. J'adresse donc mes vifs remerciements à l'ensemble des doctorants, post-doctorants et non permanents en général (j'espère que je n'oublie personne) : Abdoulaye, Bertrand, Burak, Chloé, Christine, Ester, Federico, Gaëlle, Jean-Matthieu, Jérémie, Julien, Lukas, Marc, Mehdi-Pierre, Meryam, Morgane, Pierre-Jean, Pierre-Olivier, Romain, Stéphane, Vincent, Pierre-Antoine, sans oublier les anciens Afaf, Adrien, Amin, Aymen, Christophe, David, Emilie, Euriell, Hiba, Ibrahim, Madison, Samuel et Thomas. O et mes copines des autres laboratoires Axelle et Nathalie. J'ai passé trois années merveilleuse au bureau 56, je voudrais donc remercier mes collègues et anciens collègues de ce bureau : Noé, Matthias, Innocent, Matthieu, Thomas. D, Roukaya, Habib et surtout Bénédicte et Roland avec qui j'ai partagé des bas mais surtout des hauts et beaucoup de pauses chocolat (une mention très spéciale pour Roland qui a eu la gentillesse de faire le tirage de ma thèse et d'envoyer le manuscrit à mes rapporteurs pendant que j'étais à la maternité avec mon bébé).

Un grand merci à mes amies de l'AFFDU (Association Française des Femmes Diplômées des Universités) avec qui j'ai partagé plusieurs soirées passionnantes et des débats intéressants sur la parité en France (et ailleurs).

Cette thèse n'aurait pas abouti sans le soutien de mes proches. Merci donc à mes parents, à mon frère, à mes deux sœurs et à leurs conjoints et enfants, à ma belle-famille, à la famille Mazlout, à Bouba (ma première maîtresse d'école), à mes voisins Fabienne et Franck, à mes amis ; Tahia, Noha et Olivier, Nathalie et Jérôme, Meriem, Alice, Florence, Franz, Florent, Sana, Ines, Imen, Nadia, Virginie, Nicolas, Imène, à toutes les mamans "TGV" dont j'ai croisé le chemin par "accident" et qui m'ont soutenu ces derniers mois : Tiffany, Soraya, Sandy, Alexandra, Virginie, Karine et à leurs magnifiques bébés et enfants. À mes très chers Amina et Pascal et leur petite Louisa, je leur dis merci d'être là. Mes dernières pensées vont évidemment vers mes deux hommes Yvan et Chams.

Résumé

Dans cette thèse on étudie le couplage de modèles à dimensions spatiales hétérogènes, avec une application en hydraulique fluviale. On commence par donner un cadre mathématique général à cette problématique. Ensuite, on étudie un cas académique de couplage 1-D/2-D dans le cadre elliptique. On définit les opérateurs de restriction et d'extension nécessaires à l'analyse en se basant sur la dérivation du modèle 1-D à partir du modèle 2-D. Après cela, on met en œuvre un algorithme de couplage de type Schwarz avec des conditions de type Robin. On montre alors la convergence de cet algorithme, plus particulièrement sa convergence optimale en utilisant l'opérateur absorbant exact 1-D. On termine cette partie en établissant une majoration de l'erreur entre la solution couplée et la solution globale de référence en fonction du rapport d'aspect du domaine d'étude et de la position de l'interface de couplage. Ces résultats sont illustrés numériquement.

Dans la deuxième partie, on généralise cette analyse mathématique au cas du couplage des systèmes linéaires de Saint-Venant 2-D et de Navier-Stokes hydrostatiques 3-D. En faisant l'hypothèse d'une friction nulle au fond, on montre que la convergence de l'algorithme de couplage est équivalente à celle de l'algorithme usuel de décomposition de domaine du Système de Saint-Venant. On calcule une approximation des opérateurs absorbants exacts du système de Saint-Venant, ce qui nécessite de faire des hypothèses restrictives. Comme alternative, on propose un algorithme avec des conditions de type Robin, dont on montre la convergence. Enfin, on présente une première étude d'un cas test réel de couplage des systèmes de Saint-Venant 1-D et Navier-Stokes 3-D en utilisant les codes numériques Mascaret 1-D et Telemac 3-D développés par EDF R&D.

Abstract

In this work, we study some dimensionally heterogeneous coupling problems. First we study a 1-D/2-D elliptic coupling problem. We show how to define the restriction and extension operators, required to our analysis, using the derivation of the 1-D model from the 2-D model. Then we focus on the design of a Schwarz-like iterative coupling method. We discuss the choice of boundary conditions at coupling interfaces. We prove the convergence of such algorithms and give some theoretical results related to the choice of the location of the coupling interface, and to the control of the difference between a global 2-D reference solution and the 2-D coupled one. These theoretical results are illustrated numerically.

In the second part, we extend this study to the coupling problem between the 2-D Saint-Venant and 3-D hydrostatic Navier-Stokes linearized systems. Under the assumption of a null bottom friction, we prove that the convergence of the algorithm is equivalent to the convergence of the domain decomposition algorithm for the Saint-Venant system. We focus then on the study of a coupling algorithm with Robin condition, which appears to be less restrictive than the one using approximate absorbing operators. Finally we will present some first numerical results of a test case coupling a 3-D Navier-Stokes system with a 1-D shallow water code using EDF R&D tools Mascaret 1-D and Telemac 3-D.

Table des matières

Introduction	1
I Couplage multi-dimensionnel : cadre mathématique et application à un problème modèle elliptique	5
1 Présentation du problème et généralisation des algorithmes de Schwarz dans le cadre du couplage multi-dimensionnel	7
1.1 Couplage multi-dimensionnel	7
1.1.1 Présentation du problème et définitions	7
1.1.2 Problème modèle dans le cas d'interaction one-way	9
1.2 Algorithme de décomposition de domaine et de couplage de type Schwarz	11
1.2.1 Algorithme de Schwarz originel	11
1.2.2 Généralisation de l'algorithme de Schwarz	12
1.2.3 Algorithmes de Schwarz dans le cadre de couplage de modèles	13
1.3 Généralisation dans le cadre de couplage multi-dimensionnel	14
1.3.1 Définition de la notion de couplage	15
1.3.2 Algorithme de Schwarz	16
1.3.3 Convergence de l'algorithme de Schwarz	16
2 Description d'un problème modèle couplé	19
2.1 Définition des modèles à coupler	19
2.1.1 Définition du modèle 2-D	19
2.1.2 Dérivation du modèle 1-D	21
2.2 Choix de la position des interfaces γ et Γ	22
2.3 Conditions de transmission	23
3 Algorithme de couplage multi-dimensionnel de type Schwarz	25
3.1 Algorithme de couplage de type Schwarz pour le cas test 1-D/2-D	25
3.1.1 Algorithme de couplage avec condition de type Robin <i>one-sided</i>	26
3.1.2 Comparaison de la solution du modèle couplé avec la solution de référence	33
3.2 Extension au cas 2-D/3-D	39
3.2.1 Modèles à coupler dans le cas de domaines semi-infinis	39
3.2.2 Convergence de l'algorithme de couplage avec des conditions de type Robin	39
3.2.3 Convergence de l'algorithme de couplage dans le cas de domaines bornés .	42

3.2.4	Sur l'optimisation du taux de convergence	45
4	Résultats numériques	47
4.1	Description des cas tests	47
4.1.1	Cas test #1	48
4.1.2	Cas test #2	49
4.2	Convergence de l'algorithme de Schwarz	51
4.3	Comparaison de la solution couplée avec la solution de référence	54
4.4	Choix de la position de l'interface de couplage Γ	59
II	Application au couplage des systèmes linéaires de Saint-Venant 2-D et de Navier-Stokes hydrostatiques 3-D	65
5	Définition des modèles à coupler	67
5.1	Équations de Navier-Stokes	67
5.1.1	Équation de conservation de la masse	68
5.1.2	Équation de conservation de la quantité de mouvement	68
5.1.3	Fluide incompressible	69
5.2	Équations de Navier-Stokes hydrostatiques	70
5.2.1	Dérivation des équations de Navier-Stokes hydrostatiques	70
5.2.2	Forme traditionnelle des équations de Navier-Stokes hydrostatiques	72
5.2.3	Conditions aux limites	72
5.2.4	Élimination du terme de pression	73
5.3	Dérivation des équations de Saint-Venant 2D	74
5.3.1	Mise sous forme adimensionnelle des équations	74
5.3.2	Équation des moments intégrée	76
5.3.3	Équations de Saint-Venant à l'ordre 1	77
5.3.4	Équations de Saint-Venant à l'ordre 2	77
5.4	Modèles linéarisés	79
5.4.1	Équations de Navier-Stokes hydrostatiques linéarisées	79
5.4.2	Dérivation des équations de Saint-Venant linéaires à partir des équations de Navier-Stokes hydrostatiques linéarisées	81
5.4.3	Linéarisation du système de Saint-Venant 2-D	83
6	Algorithme de couplage	87
6.1	Définition du problème couplé	87
6.1.1	Les modèles à coupler	87
6.1.2	Conditions de transmission physiques	89
6.1.3	Définition du problème couplé	92
6.2	Algorithme de couplage	92
6.2.1	Algorithme de Schwarz	92
6.2.2	Définition des opérateurs \mathcal{R} et \mathcal{E}	93
6.2.3	Choix des opérateurs \mathcal{B}_- et \mathcal{B}_+	94
6.2.4	Convergence de l'algorithme de couplage	94

7	Conditions absorbantes exactes pour les équations de Navier-Stokes hydrostatiques linéaires et pour le système de Saint-Venant linéaire	99
7.1	Définition des opérateurs absorbants exacts \mathcal{B}_-^{opt} et \mathcal{B}_+^{opt}	100
7.2	Transformée de Laplace des modèles	102
7.3	Conditions absorbantes exactes pour le mode barotrope et pour le système de Saint-Venant	103
7.3.1	Étude des éléments propres	103
7.3.2	Calcul des opérateurs $\hat{\mathcal{S}}_-^{\bar{\mathbf{U}}_h}$ et $\hat{\mathcal{S}}_+^{\mathbf{u}}$	105
7.3.3	Expressions approchées des opérateurs $\hat{\mathcal{S}}_-^{\bar{\mathbf{U}}_h}$ et $\hat{\mathcal{S}}_+^{\mathbf{u}}$	108
7.3.4	Expression des opérateurs en variables dimensionnelles	110
7.4	Conditions de transmission optimales pour les modes baroclines	111
7.5	Sur le caractère bien posé des deux modèles	112
8	Algorithme de couplage avec des conditions de type « Robin »	115
8.1	Étude du système de Saint-Venant 2-D sur l'espace entier	116
8.1.1	Définition d'une solution faible	117
8.1.2	Système parabolique	117
8.1.3	Équation de transport	119
8.1.4	Existence et unicité de la solution du système de Saint-Venant dans l'espace entier	121
8.2	Étude de l'algorithme de couplage	122
8.2.1	Problèmes paraboliques dans chaque sous-domaine	123
8.2.2	Équations de transport	125
8.2.3	L'algorithme de Schwarz est bien défini	127
8.3	Convergence de l'algorithme de décomposition de domaine du système de Saint-Venant et de l'algorithme de couplage avec des conditions de type Robin	128
8.3.1	Convergence de l'algorithme usuel de décomposition de domaine du système de Saint-Venant	128
8.3.2	Convergence de l'algorithme de couplage	132
8.4	Vers l'optimisation du taux de convergence	132
9	Couplage de modèles hydrodynamiques	137
9.1	Présentation des modèles couplés et des domaines de couplage	137
9.1.1	Modèle de référence	137
9.1.2	Modèles couplés	139
9.1.3	Conditions de transmission	140
9.2	Algorithme de couplage	140
9.3	Étude numérique du cas test	141
9.3.1	Outils numériques	141
9.3.2	Cas permanent	142
9.3.3	Cas non permanent	142
9.4	Conclusion et travail à faire	142
	Conclusions et perspectives	147

Introduction

Dans le cadre de la modélisation de phénomènes hydrodynamiques, il est fréquent que l'hétérogénéité physique et spatiale de l'écoulement conduise à coupler plusieurs modèles plutôt que d'utiliser un seul système d'équations sur tout le domaine d'étude. On remplace alors le modèle le plus général (souvent complexe) par des modèles plus simples quand la physique le permet. Les domaines mathématiques sur lesquels on définit les différents modèles peuvent appartenir à des espaces de même dimension (par exemple lorsque l'on couple un modèle de Saint-Venant 2-D avec un modèle de Navier-Stokes 2-D). Dans ce cas, il s'agit d'un couplage de physique hétérogène et de dimension homogène. Mais, dans certains cas, on peut être amené à coupler deux modèles de dimensions spatiales m et n différentes (en général, $m = n + 1$ ou $m = n + 2$) : on parle alors d'un couplage « multi-dimensionnel », ou couplage à « dimension spatiale hétérogène ». Un tel couplage présente l'avantage de réduire le coût numérique des simulations par rapport au coût que représenterait l'utilisation du **modèle global de référence m -D** sur tout le domaine du calcul, tout en prenant en compte la complexité physique adéquate en chaque zone de l'écoulement.

Cette thèse s'inscrit dans le cadre d'une collaboration entre l'Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique (INRIA) et le Laboratoire National d'Hydraulique et Environnement (LNHE) qui fait partie de la division R&D d'EDF. En effet, dans le cadre de la simulation des écoulements fluviaux chez EDF, on cherche à diminuer les coûts des calculs tout en gardant une bonne qualité de modélisation. Pour ce faire, on est amené à coupler des modèles n'ayant pas les mêmes lois physiques et/ou possédant des dimensions spatiales différentes. Les objectifs de cette thèse consistent donc à donner un cadre mathématique pour le couplage multi-dimensionnel au travers de modèles simplifiés, puis à développer des méthodes de couplage se basant sur les **méthodes de Schwarz** (utilisées habituellement dans le cadre de la décomposition de domaine et du couplage de physique hétérogène et de dimension homogène). Ces méthodes ont été utilisées pour la première fois en couplage multi-dimensionnel dans [11] et [33] où des algorithmes itératifs heuristiques ont été proposés afin de coupler des systèmes non-linéaires modélisant respectivement la circulation sanguine et les écoulements fluviaux. Dans le contexte du couplage multi-dimensionnel, on cite également la méthode MAPD (method of asymptotic partial decomposition of domain [35]) et les travaux ultérieurs de l'auteur basés sur des développements asymptotiques qui nécessitent une réécriture des codes avec un caractère intrusif.

Dans le cadre de ce travail, les algorithmes de Schwarz utilisés comme méthode de couplage ont l'avantage d'être très peu intrusifs dans les codes, ce qui facilitera leur utilisation ultérieure par les ingénieurs EDF. Tout au long de cette thèse, et comme c'est le cas pour les algorithmes usuels

de décomposition de domaine et de couplage à dimension spatiale homogène, on travaillera sur l'élaboration d'algorithmes à convergence optimale en se basant sur la théorie des **opérateurs absorbants exacts**. Ces opérateurs ont souvent des expressions non exploitables en pratique. À cette difficulté s'en rajoutera une autre due au changement de dimension. En général, on dispose dans le modèle de plus petite dimension n -D d'une quantité moyennée, qu'on doit en quelque sorte répartir spatialement selon la (ou les) dimension(s) manquante(s) afin de la transmettre au modèle m -D. On doit donc choisir un **opérateur de répartition** ou d'**extension** des quantités venant du modèle n -D, mais aussi un **opérateur de restriction** ou **projection** pour les quantités passant du modèle m -D au modèle n -D. Ce dernier est en général plus facile à définir. Le choix du premier, quant à lui, sera guidé tout au long de cette thèse par la façon dont on dérive le modèle n -D à partir du modèle global de référence m -D. En effet, les modèles n -D qu'on étudiera dans ce manuscrit sont obtenus à partir des modèles m -D d'une façon analogue à la dérivation du système de Saint-Venant 1-D à partir des équations de Navier-Stokes 2-D (en $x - z$) faite dans [17].

Enfin, une dernière difficulté liée au changement de dimension réside dans la définition de la notion de couplage entre le modèle n -D et le modèle m -D : cette notion est donnée en général sous forme moyennée. Ceci conduit à une solution couplée qui n'est pas définie d'une façon unique et qui dépend du choix des opérateurs d'interfaces. On s'intéressera donc à la comparaison de la solution couplée avec la solution globale de référence m -D et on mettra en évidence l'importance du choix de la position des interfaces du couplage et son influence sur la qualité de la solution couplée.

La thèse se divise en deux parties :

Partie I

Dans cette première partie, on va commencer par donner un cadre mathématique général au couplage multi-dimensionnel. On va introduire la notion de solution de référence, la définition de la notion de couplage et la définition des opérateurs de restriction et d'extension évoqués ci-dessus. Ensuite, on généralisera les algorithmes de Schwarz dans le cadre du couplage à dimension spatiale hétérogène et on abordera le problème d'optimisation de la convergence en utilisant les opérateurs absorbants exacts.

Afin de cerner les différentes difficultés liées au changement de dimension indiquées ci-dessus, on va étudier dans cette partie un problème académique de couplage elliptique 1-D/2-D qui pourra être généralisé à des dimensions supérieures. Le modèle 1-D sera dérivé à partir du modèle 2-D par moyenne verticale et en effectuant des approximations analogues à celles faites dans [17] pour obtenir le système de Saint-Venant 1-D à partir des équations de Navier-Stokes 2-D.

Dans le **chapitre 3**, on étudiera un algorithme de couplage 1-D/2-D de type Schwarz avec des conditions de type **Robin**. On montrera sa convergence et plus particulièrement sa convergence optimale en utilisant l'opérateur absorbant exact 1-D (pour lequel on disposera dans ce cas d'une expression exacte). Ce même type de problème a été étudié dans [3] et [24] en adoptant des approches variationnelle et algébrique. La nouveauté par rapport à ces travaux est la comparaison de la solution couplée et de la solution de référence en exploitant l'analyse asymptotique faite dans le **chapitre 2**.

On terminera cette partie en illustrant dans le **chapitre 4** les différents résultats théoriques

démontrés dans le **chapitre 3**.

Partie II

Dans cette deuxième partie, on généralisera l'analyse mathématique du couplage 1-D/2-D dans le cadre elliptique au cas du couplage entre les équations de Navier-Stokes hydrostatiques 3-D à surface libre et le système de Saint-Venant 2-D. La démarche suivie est identique à celle adoptée dans la première partie.

Dans le cadre de la modélisation des écoulements fluviaux, les équations de Navier-Stokes hydrostatiques constituent une bonne alternative aux équations de Navier-Stokes. En faisant l'hypothèse dans ces dernières que la pression est hydrostatique, l'équation de la composante verticale de vitesse est alors remplacée par une équation en pression. Toutefois l'analyse mathématique de ce système reste difficile et, comme c'est le cas avec les équations de Navier-Stokes, on dispose de peu de résultats mathématiques quant au caractère bien posé de ces équations à surface libre. En revanche, pour les équations de Navier-Stokes hydrostatiques à toit rigide, on trouve beaucoup de travaux sur ces équations à partir des années 90. On renvoie le lecteur par exemple vers [36] pour plus de détails.

Il faut aussi noter qu'au-delà des simplifications qu'apportent les équations de Navier-Stokes hydrostatiques, leur couplage avec le système Saint-Venant 2-D constitue une étape importante pour une modélisation plus réaliste qui consisterait à faire un couplage entre trois modèles : système de Saint-Venant 2-D, équations de Navier-Stokes hydrostatiques 3-D et équations de Navier-Stokes 3-D. Un tel couplage permettrait de prendre en compte les zones où la pression n'est pas hydrostatique.

Pour mettre en œuvre un algorithme de couplage entre les équations de Navier-Stokes hydrostatiques 3D et le système de Saint-Venant 2-D, on adoptera l'idée principale développée dans la première partie qui consiste à exploiter l'extension de l'opérateur absorbant 2-D et/ou la restriction de l'opérateur absorbant 3-D. Ceci ramène à la démarche usuelle consistant à linéariser les modèles afin de donner des expressions exactes ou approchées de ces opérateurs. Cette linéarisation facilite l'analyse mathématique des modèles, mais on reste confronté au problème habituel qui consiste à trouver des expressions utilisables de ces opérateurs absorbants. Cette difficulté sera mise en évidence dans le **chapitre 7**.

Dans le **chapitre 6** on commencera par définir les opérateurs de restriction et d'extension en se basant sur l'analyse asymptotique faite dans le **chapitre 5**. En effectuant l'hypothèse que le frottement est nul au fond du domaine, on démontrera que la convergence d'un algorithme de couplage entre les systèmes linéaires Saint-Venant 2-D et Navier-Stokes hydrostatiques 3-D est équivalente à la convergence de l'algorithme de décomposition de domaine usuel du système de Saint-Venant.

Ceci nous ramènera donc à l'étude de l'algorithme de décomposition de domaine usuel du système de Saint-Venant 2-D. Le calcul des opérateurs absorbants exacts et approchés du système Saint-Venant sans terme d'advection a été étudié dans [32]. Dans le **chapitre 5**, on linéarisera les équations autour d'un profil de vitesse non nul, ce qui conduira à reconsidérer le terme d'advection. Le calcul des opérateurs absorbants dans le **chapitre 7** sera basé sur les travaux de [32], [1] et [19]. Afin d'avoir des expressions exploitables de ces opérateurs, on effectuera comme dans [19] des hypothèses restrictives. Pour cette raison, on proposera et on étudiera dans le **chapitre 8** un algorithme de couplage et un algorithme de décomposition de domaine pour le

système Saint-Venant en utilisant des conditions aux limites de type **Robin** généralisées. L'optimisation de la convergence de cet algorithme en fonction du paramètre de **Robin** sera aussi abordée à la fin de ce chapitre.

Enfin, et en s'inspirant des travaux de l'équipe MOX du Politecnico di Milano (voir [33]), le dernier chapitre de cette thèse sera consacré à une première étude numérique d'un cas simple de couplage entre le système de Saint-Venant 1-D et des équations de Navier-Stokes hydrostatiques 3-D en utilisant les codes Mascaret 1-D et Telemac 3-D, tous deux développés par EDF R&D.

Première partie

Couplage multi-dimensionnel : cadre mathématique et application à un problème modèle elliptique

Chapitre 1

Présentation du problème et généralisation des algorithmes de Schwarz dans le cadre du couplage multi-dimensionnel

L'objectif de ce premier chapitre est de présenter la problématique du couplage multi-dimensionnel dans un cadre général abstrait. On décrira ensuite brièvement les méthodes de décomposition de domaine ainsi que les méthodes de couplage équidimensionnel basées sur des algorithmes itératifs de type Schwarz. Une généralisation de ces algorithmes sera présentée dans le cadre du couplage multi-dimensionnel. On donnera aussi la définition des opérateurs de restriction et d'extension. Enfin, on montrera comment exploiter la théorie des opérateurs absorbants exacts pour optimiser la convergence des algorithmes de Schwarz à dimensions spatiales hétérogènes.

1.1 Couplage multi-dimensionnel

1.1.1 Présentation du problème et définitions

On s'intéresse à un problème de couplage entre deux modèles de dimensions spatiales différentes. On considère ici le cas 1-D/2-D qui pourra se généraliser à des dimensions supérieures n -D et m -D, où $m > n$. Les systèmes d'équations sont de la forme :

$$\begin{cases} \mathcal{L}_1 u_1 = f_1 & \text{dans } \Omega_1 \times [0, T] \\ \mathcal{B}_1 u_1 = g_1 & \text{sur } \partial\Omega_1 \times [0, T] \end{cases} \quad (1.1)$$

et

$$\begin{cases} \mathcal{L}_2 u_2 = f_2 & \text{dans } \Omega_2 \times [0, T] \\ \mathcal{B}_2 u_2 = g_2 & \text{sur } \partial\Omega_2 \times [0, T] \end{cases} \quad (1.2)$$

où $\Omega_1 \subset \mathbb{R}$ et $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^2$ sont deux ouverts bornés. Les opérateurs \mathcal{L}_1 et \mathcal{L}_2 peuvent être linéaires ou non-linéaires. Cependant, et afin de développer des algorithmes de couplage optimaux, on supposera dans la section 1.3 qu'ils sont linéaires.

Par endroits dans ce chapitre, on se référera à un cas classique où le modèle \mathcal{L}_1 en dimension n est obtenu par intégration selon $m - n$ directions du modèle \mathcal{L}_2 en dimension m . C'est par exemple le cas du couplage entre les équations de Saint-Venant 2-D et les équations de Navier-Stokes hydrostatiques 3-D que l'on étudiera dans le chapitre 6.

Notion de recouvrement

Comme pour tout problème de couplage, l'existence ou non d'un recouvrement entre les domaines Ω_1 et Ω_2 est un aspect important. Toutefois, les dimensions des deux domaines étant différentes, cette notion doit être redéfinie. Dans la suite, le recouvrement sera défini en fonction des n coordonnées communes entre les deux domaines. Dans le cas 1-D/2-D la coordonnée commune est x . En considérant par souci de simplicité que Ω_2 est connexe, on notera alors $]a_2, b_2[$ la projection de Ω_2 sur l'axe des x . On a alors trois cas de figure (voir figures 1.1, 1.2 et 1.3) :

- **recouvrement total** : $]a_2, b_2[\subset \Omega_1 =]a_1, b_1[$
- **sans recouvrement** : $]a_2, b_2[\cap \Omega_1 = \{a_2\}, \{b_2\},$ ou $\{a_2, b_2\}$
- **recouvrement partiel** : les autres cas

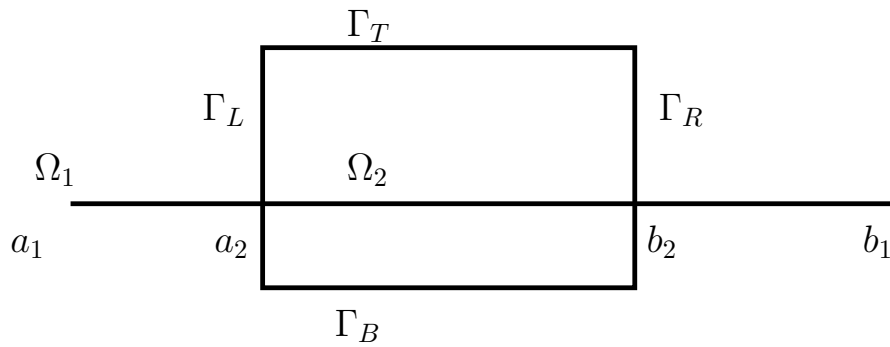


FIGURE 1.1 – Exemple d'un cas de recouvrement total entre domaines 1-D et 2-D.

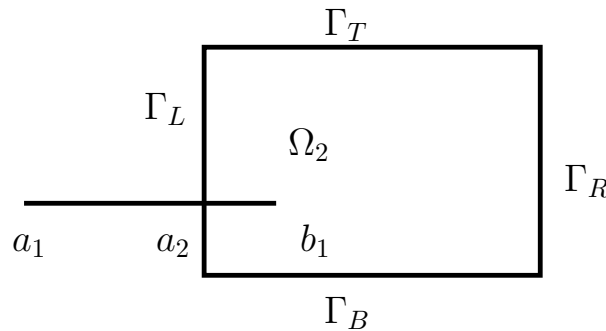


FIGURE 1.2 – Exemple d'un cas de recouvrement partiel entre domaines 1-D et 2-D.

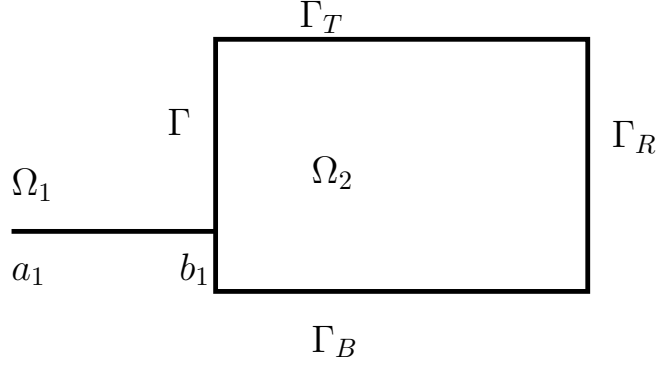


FIGURE 1.3 – Exemple d'un cas sans recouvrement entre domaines 1-D et 2-D.

Dans le cadre du couplage de modèles de même dimension, le recouvrement (partiel ou total) n'a de sens que si les deux modèles sont identiques (c'est le cadre classique de la décomposition de domaine) ou compatibles dans la zone de recouvrement. En revanche, pour deux systèmes d'équations différents, le recouvrement n'a plus de sens (car on aurait sinon une zone où deux physiques différentes cohabiteraient), ou alors seulement pour un couplage en un sens plus « faible » d'interaction *one-way* (voir §1.1.2). Cette remarque s'étend au cas de modèles de dimensions différentes : le recouvrement (partiel ou total) n'a de sens que si les deux solutions sont exactement compatibles sur la zone de recouvrement. Si ce n'est pas le cas, seule une interaction *one-way* est envisageable.

Notion de solution de référence

Une autre notion importante est celle de « solution de référence », permettant de quantifier l'intérêt du couplage. On adoptera dans ce manuscrit le point de vue suivant : on dispose d'un modèle « complexe » (ici le modèle 2-D) sur un domaine global qu'on notera Ω . Pour des raisons de complexité numérique et physique, on préfère garder ce modèle uniquement dans un sous-domaine 2-D plus restreint, que l'on note Ω_2 , et le remplacer par ailleurs par un modèle 1-D. La solution du modèle global 2-D défini dans Ω est alors la solution « idéale » de référence, à laquelle on comparera la solution simplifiée obtenue par couplage.

1.1.2 Problème modèle dans le cas d'interaction one-way

Comme discuté précédemment, un recouvrement n'a de sens que si les deux modèles sont exactement compatibles dans le domaine de recouvrement. Ceci est le cas par exemple quand la solution du système 1-D est la moyenne verticale de la solution du système 2-D.

On peut en plus avoir, dans ce cas, une relation du type :

$$u_2(x, z, t) = u_1(x, t)f(z) \quad (1.3)$$

où H est la longueur caractéristique verticale, avec $\frac{1}{H} \int_0^H f(z)dz = 1$, de façon à avoir $u_1(x, t) = \bar{u}_2(x, t)$, \bar{u}_2 étant la moyenne verticale de u_2 .

Dans ce cas, le recouvrement des domaines 1-D/2-D a un sens. Mais le fait de disposer d'une relation de type (1.3) rend inutile la résolution des deux systèmes car u_2 est obtenue de façon explicite à partir de u_1 .

Exemple de deux modèles exactement compatibles

Pour illustrer ce cas de figure, on considère les deux systèmes suivants :

- Le modèle 1-D est :

$$\begin{cases} -\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = 0 & \text{dans } \Omega_1 =]a_1, b_1[\\ u_1(a_1) = \alpha a_1 + \beta & \text{et } u_1(b_1) = \alpha b_1 + \beta \end{cases} \quad (1.4)$$

où α et β sont deux constantes réelles.

- Le modèle 2-D est :

$$\begin{cases} -\Delta u_2(x, z) = -(\alpha x + \beta)f''(z) & \text{dans } \Omega_2 =]a_2, b_2[\times [0, H] \\ \frac{\partial u_2}{\partial n}(x, H) = 0 & \text{sur } \Gamma_T \\ \frac{\partial u_2}{\partial n}(x, 0) = 0 & \text{sur } \Gamma_B \\ u_2(a_2, z) = u_1(a_2)f(z) & \text{sur } \Gamma_L \text{ et } u_2(b_2, z) = u_1(b_2)f(z) & \text{sur } \Gamma_R \end{cases} \quad (1.5)$$

où f est une fonction suffisamment régulière telle que $f'(0) = f'(H) = 0$ et en ayant toujours $\frac{1}{H} \int_0^H f(z)dz = 1$.

Les domaines Ω_1 et Ω_2 sont présentés dans la figure 1.1.

La solution de (1.4) est $u_1(x) = \alpha x + \beta$. Et grâce par exemple au théorème de Lax-Milgram, on peut montrer que le système (1.5) admet une unique solution. Cette dernière est donnée par $u_2(x, z) = (\alpha x + \beta)f(z)$.

On est donc dans le premier cas de figure indiqué ci-dessus où un recouvrement total a un sens. En revanche un couplage est inutile car on a une relation analytique entre la solution 1-D et la solution 2-D. La connaissance de la solution 1-D permet de déduire immédiatement la solution 2-D par la relation (1.3).

Dans le cas où les modèles ne sont pas exactement compatibles, un recouvrement n'a plus de sens. On ne pourra pas obtenir des solutions 1-D et 2-D compatibles sur la zone de recouvrement. On peut par contre toujours réaliser une interaction *one-way* dans laquelle on résout le modèle 1-D sur Ω_1 , et on fournit ensuite cette solution au modèle 2-D à travers les conditions aux limites sur Γ_R et Γ_L . Se pose toutefois la question du sens « physique » des solutions obtenues. Il est

donc plus cohérent dans ce cas de coupler les deux modèles sans zone de recouvrement. Dans la prochaine section, on présentera les algorithmes de décomposition de domaines et de couplage de type Schwarz.

1.2 Algorithme de décomposition de domaine et de couplage de type Schwarz

Les méthodes de Schwarz ont été introduites initialement par H.A Schwarz au 19^{ème} siècle afin de montrer l'existence de fonctions harmoniques sur un domaine de forme irrégulière (voir [41]). L'idée consistait à décomposer ce domaine en une union de sous-domaines de géométrie simple tels qu'un disque ou un rectangle, et à mettre en place une procédure itérative d'interaction entre les sous-domaines. Cet algorithme a été remis au goût du jour dans les années 1980, avec l'avènement des calculateurs parallèles (voir [13] pour un aperçu historique), afin de répartir le coût de calcul d'une résolution d'équation sur les différents processeurs disponibles.

1.2.1 Algorithme de Schwarz originel

On va commencer tout d'abord par présenter l'algorithme de Schwarz originel. Soit Ω un domaine de \mathbb{R}^n qu'on décompose en deux sous-domaines Ω_1 et Ω_2 . Comme on l'a déjà indiqué dans la section 1.1, on peut distinguer deux cas de figure selon que les domaines se recouvrent ou pas (voir figures 1.4(a) et 1.4(b)).

On cherche à résoudre :

$$\begin{cases} \mathcal{L}u &= f \text{ dans } \Omega \\ u &= 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où \mathcal{L} désigne un opérateur linéaire elliptique.

L'algorithme de Schwarz classique consiste à résoudre à chaque itération $k \geq 0$ les systèmes suivants :

$$\begin{cases} \mathcal{L}u_1^{k+1} &= f \text{ dans } \Omega_1 \\ u_1^{k+1} &= 0 \text{ sur } \partial\Omega_1^{ext} \\ u_1^{k+1} &= u_2^k \text{ sur } \Gamma_{12} = \partial\Omega_1 \cap \Omega_2 \end{cases} \quad \text{puis} \quad \begin{cases} \mathcal{L}u_2^{k+1} &= f \text{ dans } \Omega_2 \\ u_2^{k+1} &= 0 \text{ sur } \partial\Omega_2^{ext} \\ u_2^{k+1} &= u_1^{k+1} \text{ sur } \Gamma_{21} = \partial\Omega_2 \cap \Omega_1 \end{cases}$$

où $\partial\Omega_1^{ext} = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega$, $\partial\Omega_2^{ext} = \partial\Omega_2 \cap \partial\Omega$ et où u_2^0 est donné.

Pour $\mathcal{L} = \Delta$ et sous hypothèse de recouvrement des deux sous-domaines, Schwarz a prouvé que la suite (u_1^k, u_2^k) convergeait vers $(u|_{\Omega_1}, u|_{\Omega_2})$ quand k tendait vers l'infini.

L'algorithme originel décrit ci-dessus est dit « multiplicatif ». Il existe aussi une version dite « additive » naturellement parallélisable proposée par P.L Lions dans [26], qui consiste à remplacer la condition $u_2^{k+1} = u_1^{k+1}$ sur Γ_{21} par $u_2^{k+1} = u_1^k$.

L'utilisation de conditions de type Dirichlet-Dirichlet à l'interface présente plusieurs inconvénients. D'une part pour converger, la méthode de Schwarz nécessite un recouvrement entre les sous-domaines, ce qui génère un temps de calcul supplémentaire. D'autre part, on aura souvent besoin de beaucoup d'itérations avant convergence.

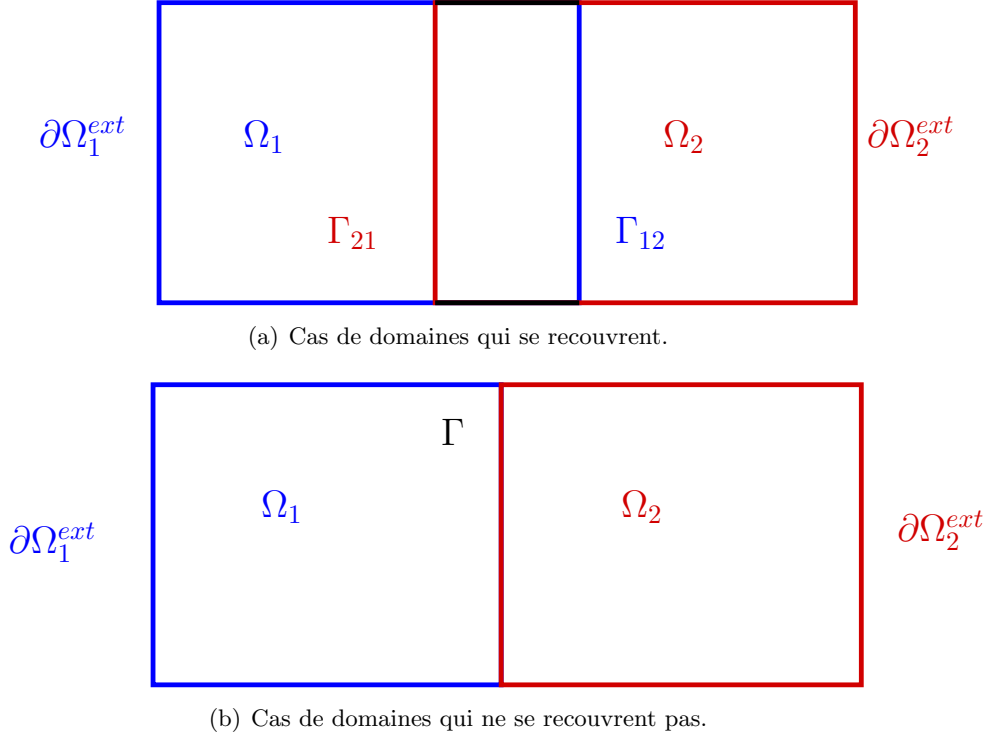


FIGURE 1.4 – Décomposition de domaines dans le cas équidimensionnel.

1.2.2 Généralisation de l'algorithme de Schwarz

L'algorithme de Schwarz peut se généraliser en remplaçant les conditions de type Dirichlet sur les interfaces Γ_{12} et Γ_{21} par :

$$B_1 u_1^{k+1} = B_1 u_2^k \text{ sur } \Gamma_{12} \text{ et } B_2 u_2^{k+1} = B_2 u_1^{k+1} \text{ sur } \Gamma_{21}$$

où B_1, B_2 sont des opérateurs d'interface.

Les premiers travaux en ce sens furent sans doute ceux de P.L. Lions dans [27] qui a proposé de remplacer la condition de Dirichlet sur l'interface par une condition de type Robin. L'algorithme de Schwarz peut alors converger même dans le cas de deux sous-domaines qui ne se recouvrent pas.

Pour étudier la convergence de ces algorithmes, on définit souvent l'erreur à l'itération k par $e_i^k = u_i^k - u_{|\Omega_i}$, $i = 1, 2$. Les erreurs vérifient, dans le cas d'équations linéaires, les systèmes suivants :

$$\begin{cases} \mathcal{L}e_1^{k+1} = 0 & \text{dans } \Omega_1 \\ e_1^{k+1} = 0 & \text{sur } \partial\Omega_1^{ext} \\ B_1 e_1^{k+1} = B_1 e_2^k & \text{sur } \Gamma_{12} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \mathcal{L}e_2^{k+1} = 0 & \text{dans } \Omega_2 \\ e_2^{k+1} = 0 & \text{sur } \partial\Omega_2^{ext} \\ B_2 e_2^{k+1} = B_2 e_1^{k+1} & \text{sur } \Gamma_{21} \end{cases} \quad (1.6)$$

Si B_1 et B_2 permettent d'avoir un problème bien posé, il suffit ensuite de montrer que ces erreurs tendent vers 0 quand k tend vers l'infini.

Une autre manière d'établir la convergence de ces algorithmes consiste à étudier les différences

entre deux itérations successives. Elles vérifient ici les mêmes systèmes (1.6), et de montrer qu'elles sont par exemple majorées par des suites géométriques de raison strictement inférieure à 1 (voir chapitre 3). Enfin il suffit de montrer que les limites obtenues sont exactement les restrictions de u sur les différents sous-domaines (voir [27]).

Remarque : en l'absence de recouvrement et en choisissant $B_1 = B_2 = Id$, ou même plus généralement $B_1 = B_2$, l'algorithme de couplage présenté ci-dessus ne converge pas. Ceci est dû au fait que les valeurs à l'interface ne changent pas d'une itération à l'autre. On a par exemple dans le cas Dirichlet-Dirichlet $u_1^{n+1} = u_2^n = u_1^n$.

Le choix des opérateurs est donc très important pour assurer la convergence des algorithmes de Schwarz vers la restriction de la solution globale sur chaque sous-domaine. Il est aussi crucial pour permettre d'avoir une vitesse de convergence « rapide ». Dans [27], P.L. Lions a fait remarquer que la constante de Robin influence la vitesse de convergence et qu'elle pourrait être remplacée par d'autres opérateurs.

Pour avoir une convergence optimale, il faut choisir idéalement B_1, B_2 tels que $B_1 e_2^1 = 0$ et/ou $B_2 e_1^1 = 0$ et tels que les deux systèmes soient bien posés. On aura alors dans le cas linéaire $e_1^2 = e_2^2 = 0$ car ces erreurs seront solutions de systèmes homogènes. On assurera donc dans ce cas une convergence en deux itérations. Ces conditions à l'interface s'appellent **conditions aux limites absorbantes exactes** ou **conditions transparentes**. On trouve une littérature abondante concernant ces conditions (voir par exemple [16], [23]).

Dans le cas d'un opérateur \mathcal{L} linéaire elliptique ou parabolique, il est établi que les opérateurs absorbants exacts sont donnés par :

$$B_i^{opt} = \frac{\partial}{\partial n_i} + DtN_i^c, \quad i = 1, 2 \quad (1.7)$$

où n_i ($i = 1, 2$) désigne la normale sortante à Ω_i et où l'opérateur DtN_i^c , appelé opérateur *Dirichlet-to-Neumann*, est défini par :

$$\text{Pour } u_0 : \Gamma_i \mapsto \mathbb{R}, \quad DtN_i^c(u_0) \equiv \frac{\partial}{\partial n_i^c}(v)|_{\Gamma_i}$$

où n_i^c est la normale sortante à $\Omega_i^c = \Omega \setminus \Omega_i$ et où v est solution de :

$$\begin{cases} \mathcal{L}v &= 0 & \text{dans } \Omega_i^c \\ v &= 0 & \text{sur } \partial\Omega_i^c \setminus \Gamma_i \\ v &= u_0 & \text{sur } \Gamma_i. \end{cases}$$

On peut en général obtenir une expression analytique des opérateurs transparents par transformée de Fourier. Ces opérateurs sont toutefois généralement non locaux en espace (et en temps dans le cas instationnaire). On est donc amené à faire des approximations pour pouvoir les implémenter numériquement (voir par exemple [15], [16] et [23]). On parle alors de **méthodes optimisées** (ou à **relaxation d'onde** dans le cas des équations d'évolution).

1.2.3 Algorithmes de Schwarz dans le cadre de couplage de modèles

Les algorithmes de Schwarz se généralisent naturellement au cadre du couplage de modèles, voir par exemple [32]. Dans ce cas, comme indiqué précédemment, un recouvrement n'a plus de

sens si les modèles ne sont pas parfaitement compatibles dans la zone de recouvrement. On doit donc résoudre un problème de la forme :

$$\begin{cases} \mathcal{L}_1 u_1 = f_1 & \text{dans } \Omega_1 \\ B_1^{ext} u_1 = g_1 & \text{sur } \partial\Omega_1^{ext} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \mathcal{L}_2 u_2 = f_2 & \text{dans } \Omega_2 \\ B_2^{ext} u_2 = g_2 & \text{sur } \partial\Omega_2^{ext} \end{cases}$$

avec $\mathcal{L}_1 \neq \mathcal{L}_2$. La difficulté réside dans ce cas dans la définition de la notion de couplage et donc dans l'écriture des conditions sur l'interface commune Γ .

On suppose par exemple que l'on veut que u_1 et u_2 vérifient les conditions suivantes (imposées par la physique) sur Γ :

$$\begin{cases} C_1 u_1 = C_2 u_2 \\ C'_2 u_2 = C'_1 u_1 \end{cases} \quad (1.8a)$$

$$(1.8b)$$

Pour résoudre ce problème, on propose l'algorithme de type Schwarz (version multiplicative) suivant :

Initialisation : u_2^0 donné

À l'étape k ($k \geq 1$), résoudre :

$$\begin{cases} \mathcal{L}_1 u_1^{k+1} = f_1 & \text{dans } \Omega_1 \\ B_1^{ext} u_1^{k+1} = g_1 & \text{sur } \partial\Omega_1^{ext} \\ B_1 u_1^{k+1} = B_2 u_2^k & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad \text{puis} \quad \begin{cases} \mathcal{L}_2 u_2^{k+1} = f_2 & \text{dans } \Omega_2 \\ B_2^{ext} u_2^{k+1} = g_2 & \text{sur } \partial\Omega_2^{ext} \\ B_2' u_2^{k+1} = B_1' u_1^{k+1} & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Les opérateurs B_1 , B_2 , B_1' et B_2' doivent permettre à convergence de vérifier sur l'interface Γ les contraintes (1.8a) et (1.8b) imposées sur u_1 et u_2 .

L'écriture des relations vérifiées par les erreurs est plus délicate ici que dans le cas de la décomposition de domaine. En effet, on n'a plus forcément $B_1 e_1^{k+1} = B_2 e_2^k$ sur Γ , mais :

$$B_1 e_1^{k+1} = B_2 e_2^k - (B_1 u_1 - B_2 u_2)$$

car rien n'assure a priori que $B_1 u_1 = B_2 u_2$ (sauf par exemple si B_1 est une combinaison linéaire de C_1 et C_1' et B_2 est la même combinaison linéaire de C_2 et C_2').

Aux erreurs de l'algorithme de Schwarz s'ajoutent donc des erreurs dues aux opérateurs d'interface.

1.3 Généralisation dans le cadre de couplage multi-dimensionnel

Dans ce paragraphe, on propose de généraliser les algorithmes de décomposition de domaine et de couplage de type Schwarz dans le cadre du couplage multi-dimensionnel. Là encore, un recouvrement n'a pas de sens sauf si les modèles sont exactement compatibles dans la zone de recouvrement. On présente comme dans le reste du chapitre le cas du couplage 1-D/2-D.

On considère les deux systèmes suivants :

$$\begin{cases} \mathcal{L}_1 u_1(x) = f_1(x) & \text{pour } x \in \Omega_1 \subset \mathbb{R} \\ B_1^{ext} u_1(x) = g_1(x) & \text{pour } x \in \partial\Omega_1^{ext} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \mathcal{L}_2 u_2(x, z) = f_2(x, z) & \text{pour } (x, z) \in \Omega_2 \subset \mathbb{R}^2 \\ B_2^{ext} u_2(x, z) = g_2(x, z) & \text{pour } (x, z) \in \partial\Omega_2^{ext} \end{cases} \quad (1.9)$$

On suppose dans la suite que \mathcal{L}_1 et \mathcal{L}_2 sont linéaires.

On cherche à coupler ces deux systèmes à travers des interfaces de type $\gamma = \{x = L_0\}$ pour le

modèle 1-D et $\Gamma = \{(L_0, z), b(L_0) \leq z \leq h(L_0)\}$ pour le modèle 2-D (et plus généralement γ pour le modèle n -D et Γ pour le modèle m -D).

Comme c'est le cas dans le cadre équi-dimensionnel, la difficulté réside dans l'écriture des conditions sur les interfaces γ et Γ . À cela s'ajoute la question de la **répartition** (ou **relèvement**) de l'information venant du modèle 1-D sur l'interface Γ , et celle de la **restriction** (ou **projection**) des quantités venant du modèle 2-D au point γ .

1.3.1 Définition de la notion de couplage

Idéalement on suppose que u_1 et u_2 vérifient les conditions physiques suivantes sur les interfaces :

$$\begin{cases} C_1 u_1(L_0) = C_2 (\mathcal{R}u_2)(L_0) & (1.10a) \\ C_2' u_2(L_0, z) = C_1' (\mathcal{E}u_1)(L_0, z) & \text{pour } (L_0, z) \in \Gamma \end{cases} \quad (1.10b)$$

où \mathcal{R} et \mathcal{E} désignent respectivement l'opérateur restriction (ou projection) sur γ et extension ou (relèvement) sur Γ .

Plus généralement on peut définir ces opérateurs de la façon suivante (voir [3]) :

$$\begin{aligned} \mathcal{R} : \Lambda_{mD} &\longrightarrow \Lambda_{nD} \\ (u_2)|_{\Gamma} &\longmapsto (\mathcal{R}u_2)|_{\gamma} \end{aligned}$$

où Λ_{nD} et Λ_{mD} désignent respectivement les espaces de fonctions traces sur γ pour les fonctions n -D et sur Γ pour les fonctions m -D.

Cela signifie que pour tout $(x, z) \in \Gamma$ où $x \in \gamma \subset \mathbb{R}^n$ et pour toute fonction u_2 dépendant de la variable m -D (x, z) , on a $(\mathcal{R}u_2)$ est fonction de x .

Et

$$\begin{aligned} \mathcal{E} : \Lambda_{nD} &\longrightarrow \Lambda_{mD} \\ (u_1)|_{\gamma} &\longmapsto (\mathcal{E}u_1)|_{\Gamma} \end{aligned}$$

C'est à dire pour tout $x \in \gamma$ et pour tout u_1 fonction de x , on a $(\mathcal{E}u_1)$ est fonction de la variable m -D $(x, z) \in \Gamma$.

Comme indiqué dans [3], l'opérateur \mathcal{E} est injectif mais pas surjectif, et inversement \mathcal{R} est surjectif mais pas injectif.

Malheureusement, comme on va le voir dans les chapitres 2 et 6, on ne dispose pas souvent de conditions de type (1.10) mais plutôt de conditions de type :

$$\begin{cases} C_1 u_1(L_0) = C_2 (\mathcal{R}u_2)(L_0) & (1.11a) \\ C_2' u_1(L_0) = C_1' (\mathcal{R}u_2)(L_0) & (1.11b) \end{cases}$$

Ce type de conditions (1.11) ne permet pas d'avoir un problème bien posé. On n'a pas en effet l'unicité du problème couplé (1.9) sous ces conditions de couplage.

Le choix des opérateurs d'interfaces en $\{x = L_0\}$ et sur Γ doit permettre de satisfaire les trois critères suivants :

- (i) avoir un problème couplé bien posé, et plus particulièrement des modèles 1-D et 2-D bien posés
- (ii) satisfaire les conditions physiques de type (1.11)
- (iii) contrôler l'erreur de modélisation entre la solution couplée et la solution de référence, à savoir la solution 2-D globale. En effet comme on le verra dans les chapitres 2 et 5, le modèle 1-D (ou n -D) est souvent obtenu à partir du modèle 2-D (m -D) en effectuant une réduction (moyenne verticale dans le cadre de ce manuscrit) et en effectuant quelques approximations. De ce fait, on ne s'attend pas à avoir la partie 2-D de la solution couplée parfaitement égale à la restriction de la solution globale sur le domaine considéré.

1.3.2 Algorithme de Schwarz

Maintenant, une fois les conditions de transmission (1.11) définies et les opérateurs \mathcal{R} et \mathcal{E} précisés, on peut proposer l'algorithme de couplage de type Schwarz (version multiplicative) suivant :

Initialisation : u_2^0 donné

À l'étape k ($k \geq 1$), résoudre :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}_1 u_1^{k+1} = f_1 \text{ dans } \Omega_1 \\ B_1^{ext} u_1^{k+1} = g_1 \text{ sur } \partial\Omega_1^{ext} \\ B_1 u_1^{k+1} = B_2(\mathcal{R}u_2^k) \text{ sur } \gamma \end{array} \right. \quad \text{puis} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}_2 u_2^{k+1} = f_2 \text{ dans } \Omega_2 \\ B_2^{ext} u_2^{k+1} = g_2 \text{ sur } \partial\Omega_2^{ext} \\ B_2' u_2^{k+1} = B_1'(\mathcal{E}u_1^{k+1}) \text{ sur } \Gamma \end{array} \right.$$

Les opérateurs B_1 , B_2 , B_1' et B_2' doivent être choisis de façon à satisfaire les critères (i), (ii) et (iii) évoqués ci-dessus et de manière à assurer la convergence de l'algorithme.

1.3.3 Convergence de l'algorithme de Schwarz

Afin d'étudier la convergence de l'algorithme proposé ci-dessus, on peut par exemple commencer par étudier la différence entre deux itérations successives et montrer ensuite que les suites $(u_1)_{k \geq 0}$ et $(u_2)_{k \geq 0}$ sont convergentes dans des espaces adéquats.

Analyse de la convergence

On note dans ce cas $e_1^{k+1} = u_1^{k+1} - u_1^k$ et $e_2^{k+1} = u_2^{k+1} - u_2^k$. Ces deux fonctions vérifient les systèmes suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}_1 e_1^{k+1} = 0 \text{ dans } \Omega_1 \\ B_1^{ext} e_1^{k+1} = 0 \text{ sur } \partial\Omega_1^{ext} \\ B_1 e_1^{k+1} = B_2(\mathcal{R}e_2^k) \text{ sur } \gamma \end{array} \right. \quad \text{puis} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}_2 e_2^{k+1} = 0 \text{ dans } \Omega_2 \\ B_2^{ext} e_2^{k+1} = 0 \text{ sur } \partial\Omega_2^{ext} \\ B_2' e_2^{k+1} = B_1'(\mathcal{E}e_1^{k+1}) \text{ sur } \Gamma \end{array} \right.$$

À convergence, on doit donc s'assurer que les conditions de transmission (1.11) sont bien vérifiées.

Remarque : si on dispose d'une solution de référence u , alors l'erreur entre la partie 2-D de la solution couplée (à convergence) et cette solution vérifie sur Γ :

$$B_2'(u_2 - u) = B_1'(\mathcal{E}u_1 - u) + B_1'u - B_2'u$$

Ensuite le lien entre u_1 et u_2 est obtenu à travers les conditions de transmission (1.11). À l'erreur due au choix des opérateurs B'_i , s'ajoute donc une erreur due au choix des opérateurs \mathcal{R} et \mathcal{E} .

Utilisation des opérateurs absorbants

Comme dans le cadre de la décomposition de domaine ou du couplage de modèles de même dimension spatiale, on peut aussi utiliser ici les opérateurs absorbants exacts (ou approchés) afin d'optimiser la convergence de l'algorithme. En effet, si on note $B_1^{1D,opt}$ l'opérateur absorbant du modèle 1-D et $B_2^{2D,opt}$ l'opérateur absorbant du modèle 2-D (calculés tous les deux dans le cadre de la décomposition de domaines classique), alors on peut définir l'opérateur B_2^{opt} permettant une convergence optimale de l'algorithme de couplage de la façon suivante :

Définition 1.1. *Pour tout u_2 fonction à deux variables de l'espace on définit l'opérateur 1-D B_2^{opt} tel que :*

$$\left(B_2^{opt} \circ \mathcal{R} \right) (u_2) = \left(\mathcal{R} \circ B_2^{2D,opt} \right) (u_2)$$

Cela signifie que si l'expression de l'opérateur $B_2^{2D,opt}$ ne contient pas de terme en dérivées de z , alors B_2^{opt} est la restriction de $B_2^{2D,opt}$ à l'ensemble des fonctions 1-D en espace.

De même on définit B_1^{opt} de la façon suivante :

Définition 1.2. *Pour tout u_1 fonction dépendant d'une variable de l'espace on définit l'opérateur 2-D B_1^{opt} tel que :*

$$\left(B_1^{opt} \circ \mathcal{E} \right) (u_1) = \left(\mathcal{E} \circ B_1^{1D,opt} \right) (u_1)$$

Dans ce cas on peut énoncer le résultat suivant :

Lemme 1.1. *si on choisit les opérateurs d'interface dans l'algorithme de couplage tels que $B_2 = B_2^{opt}$ ou/et $B'_1 = B_1^{opt}$ alors l'algorithme converge en deux itérations.*

Démonstration

Les fonctions $e_1^{k+1} = u_1^{k+1} - u_1^k$ ou/et $e_2^{k+1} = u_2^{k+1} - u_2^k$ vérifient sur les interfaces $\{x = L_0\}$ et Γ les conditions suivantes :

$$B_1 e_1^{k+1} = B_2 (\mathcal{R} e_2^k) = B_2^{opt} (\mathcal{R} e_2^k) = \mathcal{R} (B_2^{2D,opt} e_2^k) = 0$$

ou/et

$$B'_2 e_2^{k+1} = B'_1 (\mathcal{E} e_2^{k+1}) = B_1^{opt} (\mathcal{E} e_2^{k+1}) = \mathcal{E} (B_1^{1D,opt} e_1^{k+1}) = 0$$

Dans ce cas, et à condition d'avoir un problème bien posé, e_1^{k+1} ou/et e_2^{k+1} vérifient des systèmes homogènes avec des conditions aux limites nulles, donc elles sont nulles. Il suffit ensuite, de montrer par exemple que les suites $(u_1^k)_{k \geq 0}$ et $(u_2^k)_{k \geq 0}$ sont de Cauchy pour déduire la convergence en deux itérations de l'algorithme (voir chapitre 3).

Convergence, mais vers quelle solution ?

Une fois que la convergence de l'algorithme est assurée tout en vérifiant les critères (i) et (ii), les questions qui restent à résoudre sont : vers quelle solution l'algorithme converge-t-il, et quelle est l'erreur commise entre la solution couplée et la solution globale de référence ? On étudiera ces questions dans le cadre d'un problème modèle elliptique dans le chapitre 3.

Chapitre 2

Description d'un problème modèle couplé

On va considérer dans ce chapitre un cas académique de modèles elliptiques. On va présenter un modèle 2-D et montrer comment dériver, sous certaines conditions, un système d'équations 1-D à partir de ce modèle. On verra qu'il y a une analogie avec la dérivation des équations de Saint-Venant à partir des équations de Navier-Stokes.

2.1 Définition des modèles à coupler

2.1.1 Définition du modèle 2-D

On considère le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u(x, z) = F(x, z) & \text{dans } \Omega \\ \alpha \frac{\partial u}{\partial n}(x, z) + \kappa u(x, z) = g(x, z) & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.1)$$

où Ω est un ouvert de \mathbb{R}^2 . Les constantes positives α et κ permettent des conditions aux limites de type Dirichlet, Neumann ou Robin.

Pour reprendre la terminologie des équations de Saint-Venant, on suppose que Ω contient une partie « peu profonde » Ω_{1D} (un domaine de \mathbb{R}^2 est dit peu profond si l'une des deux grandeurs caractéristiques verticale ou horizontale est négligeable devant l'autre). On propose par la suite de remplacer dans Ω_{1D} le modèle 2-D par un modèle réduit 1-D. Ceci nous amène donc à coupler un modèle 1-D avec un modèle 2-D. Avant de montrer comment on dérive le système 1-D à partir du système 2-D (2.1), on va commencer par donner les définitions suivantes :

Définition 2.1. Une solution u de (2.1) est dite à effet 2-D négligeables si sa dépendance par rapport à la variable horizontale z est faible. Cela signifie par exemple que $\|\frac{\partial u}{\partial z}\|_\infty$ est petite devant 1.

Définition 2.2. On désigne par Ω_{1D} le sous-domaine de Ω où les effets 2-D sont négligeables (voir figure 2.1). Son complémentaire dans Ω sera noté Ω_{2D} .

Remarque : La définition de Ω_{1D} dépend principalement du ratio entre la longueur caractéristique horizontale et la hauteur caractéristique verticale, mais aussi du terme de forçage, des conditions aux limites, etc., qui permettent de justifier ou non que les effets 2-D sont négligeables.

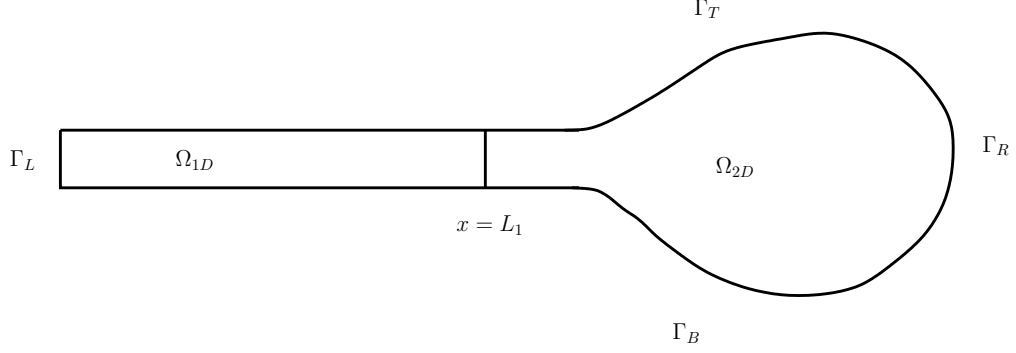


FIGURE 2.1 – Domaine de calcul Ω , incluant une zone ($x \geq L_1$) où les effets 2-D ne sont pas négligeables et une zone peu profonde ($x < L_1$) où on va dériver un modèle 1-D.

On suppose qu'il existe b et h , fonctions de x , et L_1 tels que :

$$\Omega_{1D} = \{(x, z)/0 < x < L_1, b(x) < z < h(x)\} \quad \text{et} \quad \Omega_{2D} = \Omega \cap \{x > L_1\}$$

On considère dans la suite le système (2.1) avec le choix suivant de conditions aux limites :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u(x, z) = F(x, z) & \text{dans } \Omega \quad (2.2a) \\ \frac{\partial u}{\partial n_T}(x, z) = 0 & \text{sur } \Gamma_T \quad (2.2b) \\ \frac{\partial u}{\partial n_B}(x, z) + \kappa u(x, z) = 0 & \text{sur } \Gamma_B \quad (2.2c) \\ u(x, z) = \gamma_1(x, z) & \text{sur } \Gamma_L \quad (2.2d) \\ u(x, z) = \gamma_2(x, z) & \text{sur } \Gamma_R \quad (2.2e) \end{array} \right.$$

où $n_T = \frac{1}{\sqrt{1 + |\partial_x h|^2}}(-\partial_x h, 1)^t$ et $n_B = \frac{1}{\sqrt{1 + |\partial_x b|^2}}(-\partial_x b, 1)^t$ sont les normales sortantes au domaine Ω .

2.1.2 Dérivation du modèle 1-D

Afin de dériver le modèle 1-D dans Ω_{1D} , on introduit les variables et les quantités sans dimension suivantes :

$$\varepsilon = \frac{H}{L_1} \quad \tilde{x} = \frac{x}{L_1}, \quad \tilde{z} = \frac{z}{H}$$

$$\tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{z}) = \frac{u(x, z)}{U}, \quad \tilde{F}(\tilde{x}, \tilde{z}) = F(x, z) \frac{L_1^2}{U}, \quad \tilde{h}(\tilde{x}) = \frac{h(x)}{H}, \quad \tilde{b}(\tilde{x}) = \frac{b(x)}{H} \quad \text{et} \quad \tilde{\kappa} = \kappa L_1$$

où L_1 (respectivement H) désigne la longueur (respectivement la hauteur) caractéristique de Ω_{1D} et U est un ordre de grandeur caractéristique de u . Le paramètre ε sera supposé très petit dans la suite : $\varepsilon \ll 1$.

La mise sous forme adimensionnelle de l'équation (2.2a) donne :

$$-\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2} - \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{z}^2} = \tilde{F} \quad \text{dans} \quad \tilde{\Omega}_{1D} \quad (2.3)$$

où $\tilde{\Omega}_{1D} = \{(\tilde{x}, \tilde{z})/0 < \tilde{x} < 1, \tilde{b}(\tilde{x}) < \tilde{z} < \tilde{h}(\tilde{x})\}$.

Ensuite, la mise sous forme adimensionnelle des conditions aux limites donne :

- en $\tilde{z} = \tilde{h}$:

$$-\varepsilon^2 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}} = 0 \quad (2.4)$$

- en $\tilde{z} = \tilde{b}$:

$$-\varepsilon^2 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} \frac{\partial \tilde{b}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}} + \varepsilon \tilde{\kappa} \tilde{u} \sqrt{1 + \varepsilon^2 \left| \frac{\partial \tilde{b}}{\partial \tilde{x}} \right|^2} = 0 \quad (2.5)$$

- sur $\tilde{\Gamma}_L = [\tilde{b}(0), \tilde{h}(0)]$:

$$\tilde{u} = \frac{\gamma_1}{U}$$

Hypothèses : on va dans la suite faire les hypothèses suivantes :

$$\tilde{F} = O(1), \quad \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2} = O(1), \quad \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{x}} = O(1), \quad \frac{\partial \tilde{b}}{\partial \tilde{x}} = O(1), \quad \text{et} \quad \tilde{\kappa} = O(\varepsilon) \quad (2.6)$$

Combinés avec le fait que $\varepsilon \ll 1$, ceci donne des conditions suffisantes pour justifier des effets 2-D négligeables.

En effet, à partir de l'équation (2.3) on déduit que :

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{z}^2} = O(\varepsilon^2) \quad (2.7)$$

Ensuite, les conditions (2.4) et (2.5) impliquent que $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}} = O(\varepsilon^2)$ en $\tilde{z} = \tilde{h}$ et en $\tilde{z} = \tilde{b}$. En intégrant (2.7) par exemple sur $(\tilde{z}, 1)$, on obtient alors :

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}} = O(\varepsilon^2) \quad (2.8)$$

Comme $\varepsilon \ll 1$, ceci signifie que \tilde{u} dépend « peu » de z .

Enfin, en réintégrant entre 0 et \tilde{z} , on obtient :

$$\tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{z}) = \tilde{u}(\tilde{x}, 0) + O(\varepsilon^2)$$

En multipliant par U et en revenant aux variables dimensionnelles, on obtient :

$$u(x, z) = u(x, 0) + O(\varepsilon^2), \quad \forall (x, z) \in \Omega_{1D} \quad (2.9)$$

On va maintenant introduire l'opérateur de moyenne verticale. Pour toute fonction f dépendant de z , on note :

$$\bar{f} = \frac{1}{H} \int_0^H f(z) dz \quad \text{et} \quad \bar{f}(x) = \frac{1}{H} \int_0^H f(x, z) dz$$

En moyennant sur la verticale la relation (2.9), on a :

$$\bar{u}(x) = u(x, 0) + O(\varepsilon^2), \quad \forall x \in [0, L]$$

D'où

$$u(x, z) = \bar{u}(x) + O(\varepsilon^2), \quad \forall (x, z) \in \Omega_{1D} \quad (2.10)$$

En moyennant sur la verticale l'équation (2.3) et compte-tenu de la condition de Robin sur $\Gamma_B^1 = \Gamma_B \cap \partial\Omega_{1D}$, on trouve :

$$-\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2}(x) + \frac{\kappa}{H} u(x, 0) = \bar{F}(x), \quad \text{où} \quad \bar{F}(x) = \frac{1}{H} \int_0^H F(x, z) dz$$

D'où pour tout $x \in [0, L_1]$ et compte-tenu de la relation (2.10), on a :

$$-\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\kappa}{H} u_1 = \bar{F} \quad (2.11)$$

Cette équation va remplacer l'équation (2.2a) dans Ω_{1D} .

Remarques :

- Le nombre sans dimension $\tilde{\kappa}$ n'est d'autre que le **nombre de Biot**. Faire l'hypothèse que $\tilde{\kappa} = O(\varepsilon)$ dans le cas où $\varepsilon \ll 1$ revient à supposer que ce nombre est petit. La dérivation du modèle 1-D dans ce cas est classique dans la littérature de physique thermique, en particulier dans la dérivation des modèles d'ailettes (voir par exemple [6]). Dans le cadre de ce chapitre, on se placera uniquement dans le contexte physique où le **nombre de Biot** est très petit (et donc κ est petit). Les cas où le coefficient κ est grand ou infini ne seront donc pas traités.
- Pour une autre analyse mathématique du problème, voir [35].
- Cette dérivation peut se généraliser pour des dimensions supérieures. Si on part d'un modèle n -D, on peut obtenir le modèle $(n-1)$ -D suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta_h u_1 + \frac{\kappa}{H} u_1 = \bar{F} \\ + \text{Conditions aux limites} \end{array} \right.$$

2.2 Choix de la position des interfaces γ et Γ

Dans la pratique il est difficile de connaître la valeur optimale de L_1 , délimitant la frontière entre un comportement 1-D et un comportement 2-D. En général, on est capable de définir une

valeur L_2 telle que $(\Omega \cap \{x \geq L_2\}) \subset \Omega_{2D}$. En d'autres termes $L_2 \geq L_1$ et donc on est dans la zone où les effets 2-D ne sont pas négligeables. L'objectif est donc de choisir la position de l'interface de façon à gagner en coût de calcul par rapport à la résolution du système 2-D dans le domaine entier et de garder une bonne qualité de modélisation.

Dans la suite on va choisir la position de l'interface Γ en $x = L_0$ sans connaissance a priori de L_1 , à part le fait que $L_0 < L_2$. On définit ensuite $\Omega_1 = \Omega \cap \{x < L_0\}$ et $\Omega_2 = \Omega \cap \{x > L_0\}$. On remplace dans Ω_1 le système 2-D par le système réduit 1-D. On obtient donc les modèles suivants :

$$\text{Modèle 1-D : } \begin{cases} -\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\kappa}{H} u_1 = F_1 & \text{dans } (0, L_0) \\ u_1(0) = \bar{\gamma}_1 \end{cases} \quad (2.12)$$

et

$$\text{Modèle 2-D : } \begin{cases} -\Delta u_2 = F_2 & \text{dans } \Omega_2 \\ \frac{\partial u_2}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma_T^2 = \Gamma_T \cap \partial\Omega_2 \\ \frac{\partial u_2}{\partial n} + \kappa u_2 = 0 & \text{sur } \Gamma_B^2 = \Gamma_B \cap \partial\Omega_2 \\ u_2 = \gamma_2 & \text{sur } \Gamma_R \end{cases} \quad (2.13)$$

où $F_1 = \bar{F}|_{\Omega_1}$ et $F_2 = F|_{\Omega_2}$.

On cherche à coupler ces deux systèmes à travers l'interface Γ placée en $x = L_0$. On distingue alors deux cas de figures possibles :

- Un cas favorable où $L_0 < L_1$: dans ce cas les effets 2-D sont négligeables en $x = L_0$ et on peut utiliser la relation (2.10), ce qui signifie que u est très proche de sa moyenne.
- Un cas défavorable correspondant à $L_0 > L_1$: dans ce cas on ne peut justifier le remplacement du modèle 2-D par le modèle 1-D au voisinage de $x = L_0$.

2.3 Conditions de transmission

Maintenant que les systèmes (2.12) et (2.13) sont posés, on va définir la notion de couplage à travers les interfaces. Comme on l'a indiqué dans le chapitre 1, la solution de référence permettant de quantifier l'intérêt du couplage est la solution globale 2-D. Pour définir la notion de couplage, on va donc regarder les quantités naturellement transmises à travers l'interface Γ par la solution de référence.

Cette solution globale u de (2.1) vérifie les conditions suivantes sur l'interface Γ :

$$[u]_{\Gamma} = 0 \quad \text{et} \quad \left[\frac{\partial u}{\partial n} \right]_{\Gamma} = 0$$

où $[\cdot]_\Gamma$ désigne le saut à travers Γ .

Comme le système (2.12) est obtenu en moyennant (2.1) selon z , on va donc définir le problème couplé comme suit :

Définition 2.3. *On cherche à résoudre les systèmes (2.12) et (2.13) tels qu'on ait à l'interface $\gamma = \{x = L_0\}$ les conditions aux limites suivantes :*

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1(L_0) = \frac{1}{H} \int_0^H u_2(L_0, z) dz \end{array} \right. \quad (2.14a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_1}{\partial x}(L_0) = \frac{1}{H} \int_0^H \frac{\partial u_2}{\partial x}(L_0, z) dz \end{array} \right. \quad (2.14b)$$

En revanche, ces conditions ne permettent pas d'avoir l'unicité de la solution du modèle couplé. En particulier, elles ne permettent pas d'avoir un modèle 2-D bien posé.

En résumé

On a montré dans ce chapitre comment dériver le modèle 1-D à partir du modèle 2-D. Le problème couplé est alors défini par (2.12), (2.13), (2.14a) et (2.14b). Dans le chapitre suivant, on va donner la définition des opérateurs de restriction et d'extension et on va résoudre ce problème en mettant en œuvre un algorithme de couplage de type Schwarz. On choisira comme conditions aux limites des conditions de type Robin qui permettent de vérifier les critères (i), (ii) et (iii) définis dans la section 1.3.1, page 16.

Chapitre 3

Algorithme de couplage multi-dimensionnel de type Schwarz

Dans ce chapitre, afin de résoudre le problème couplé défini par (2.12), (2.13), (2.14a) et (2.14b), on va mettre en œuvre un algorithme de couplage multi-dimensionnel avec des conditions de type Robin. On montrera sa convergence ainsi que sa convergence optimale en utilisant l'opérateur absorbant exact 1-D. La solution couplée ainsi obtenue sera comparée à la solution globale de référence. Plus particulièrement on va montrer une majoration de l'erreur entre ces deux solutions en fonction du rapport d'aspect ε et de la position de l'interface de couplage. Enfin, on généralisera ces résultats au couplage 2-D/3-D.

3.1 Algorithme de couplage de type Schwarz pour le cas test 1-D/2-D

Tout d'abord on rappelle que le problème couplé est défini par les systèmes :

$$\text{Modèle 1-D : } \begin{cases} -\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\kappa}{H} u_1 = F_1 & \text{dans } (0, L_0) \\ u_1(0) = \bar{\gamma}_1 \end{cases} \quad (3.1)$$

et

$$\text{Modèle 2-D : } \begin{cases} -\Delta u_2 = F_2 & \text{dans } \Omega_2 \\ \frac{\partial u_2}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma_T^2 = \Gamma_T \cap \partial\Omega_2 \\ \frac{\partial u_2}{\partial n} + \kappa u_2 = 0 & \text{sur } \Gamma_B^2 = \Gamma_B \cap \partial\Omega_2 \\ u_2 = \gamma_2 & \text{sur } \Gamma_R \end{cases} \quad (3.2)$$

Ces deux modèles doivent vérifier sur les interfaces Γ et γ les conditions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1(L_0) = \frac{1}{H} \int_0^H u_2(L_0, z) dz \\ \frac{\partial u_1}{\partial x}(L_0) = \frac{1}{H} \int_0^H \frac{\partial u_2}{\partial x}(L_0, z) dz \end{array} \right. \quad (3.3a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1(L_0) = \frac{1}{H} \int_0^H u_2(L_0, z) dz \\ \frac{\partial u_1}{\partial x}(L_0) = \frac{1}{H} \int_0^H \frac{\partial u_2}{\partial x}(L_0, z) dz \end{array} \right. \quad (3.3b)$$

Ce même problème a été étudié dans [3] et [24] en utilisant des approches variationnelles et algébriques. Pour rendre le problème bien posé, les auteurs ont choisi dans ces deux articles les conditions aux limites suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1(L_0) = \frac{1}{H} \int_0^H u_2(L_0, z) dz \quad \text{pour le modèle 1-D} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x}(L_0, z) = \frac{\partial u_1}{\partial x}(L_0) \quad 0 < z < H \quad \text{pour le modèle 2-D} \end{array} \right. \quad (3.4a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1(L_0) = \frac{1}{H} \int_0^H u_2(L_0, z) dz \quad \text{pour le modèle 1-D} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x}(L_0, z) = \frac{\partial u_1}{\partial x}(L_0) \quad 0 < z < H \quad \text{pour le modèle 2-D} \end{array} \right. \quad (3.4b)$$

ou bien

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_1}{\partial x}(L_0) = \frac{1}{H} \int_0^H \frac{\partial u_2}{\partial x}(L_0, z) dz \quad \text{pour le modèle 1-D} \\ u_2(L_0, z) = u_1(L_0) \quad 0 < z < H \quad \text{pour le modèle 2-D} \end{array} \right. \quad (3.5a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_1}{\partial x}(L_0) = \frac{1}{H} \int_0^H \frac{\partial u_2}{\partial x}(L_0, z) dz \quad \text{pour le modèle 1-D} \\ u_2(L_0, z) = u_1(L_0) \quad 0 < z < H \quad \text{pour le modèle 2-D} \end{array} \right. \quad (3.5b)$$

Ceci est un choix parmi d'autres qui permet de satisfaire les conditions de transmission (3.3). Dans [3], on propose une formulation faible du problème couplé comme étant la somme des formulations des problèmes n -D et m -D pour $n = 1, 2$ et $m = 1, 2, 3$. Ensuite, en introduisant un paramètre $\alpha \in \{0, 1\}$ permettant de choisir les conditions (3.4) ou les conditions (3.5), on résout le problème en utilisant une formulation variationnelle augmentée. Dans [24], on s'intéresse au problème de couplage sous forme discrétisé en appliquant une méthode itérative de type Gauss-Seidel. Puis, on utilise une méthode GMRES ou de Krylov pour passer d'une itération à l'autre. On propose ici une approche itérative de type Schwarz qui a l'avantage d'être peu intrusive dans les codes de calcul (même si dans ce chapitre on ne s'intéresse qu'à un cas simple). Ces méthodes itératives ont été utilisées pour la première fois dans le cadre du couplage multi-dimensionnel dans [11] et [33]. La nouveauté par rapport à [3] et [24] est la comparaison de la solution de couplage obtenue à convergence de l'algorithme de Schwarz avec la solution globale de référence.

3.1.1 Algorithme de couplage avec condition de type Robin *one-sided*

Pour coupler les systèmes (3.1) et (3.2), on peut mettre en place l'algorithme de Schwarz défini dans l'encadré 3.1 ci-après.

Initialisation : u_2^0 donné.

À l'étape k ($k \geq 0$), résoudre :

$$\begin{cases} -\frac{\partial^2 u_1^{k+1}}{\partial x^2} + \frac{\kappa}{H} u_1^{k+1} = F_1 & \text{dans } \Omega_1 \\ u_1^{k+1}(0) = \bar{\gamma}_1 \\ B_1(u_1^{k+1})(L_0) = B_1(\mathcal{R}u_2^k)(L_0) \end{cases}$$

puis résoudre

$$\begin{cases} -\Delta u_2^{k+1} = F_2 & \text{dans } \Omega_2 \\ \frac{\partial u_2^{k+1}}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma_T^2 \\ \frac{\partial u_2^{k+1}}{\partial n} + \kappa u_2^{k+1} = 0 & \text{sur } \Gamma_B^2 \\ u_2^{k+1} = \gamma_2 & \text{sur } \Gamma_R \\ B_2(u_2^{k+1})(L_0, z) = B_2(\mathcal{E}u_1^{k+1})(L_0, z) & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

Algorithme 3.1: Algorithme de Schwarz de couplage multi-dimensionnel

L'étape suivante consiste alors à définir les opérateurs \mathcal{R} , \mathcal{E} , B_1 et B_2 de façon à satisfaire les contraintes physiques (3.3a) et (3.3b) et à s'assurer de la convergence de l'algorithme.

Définition des opérateurs \mathcal{R} et \mathcal{E}

La définition dans le cas général des opérateurs \mathcal{R} et \mathcal{E} a été donnée dans le chapitre 1. Dans le cadre du couplage des modèles (3.1) et (3.2), on va définir l'opérateur \mathcal{R} comme étant l'opérateur de moyenne verticale, de façon cohérente avec la dérivation du modèle 1-D à partir du modèle 2-D :

$$\begin{aligned} \mathcal{R} : \Lambda_{2D} &\longrightarrow \Lambda_{1D} \\ (u_2)_{|\Gamma} &\longmapsto \frac{1}{H} \int_{\Gamma} (u_2)_{|\Gamma} dz \end{aligned}$$

c'est à dire $(\mathcal{R}(u_2))(L_0) = \frac{1}{H} \int_{\Gamma} u_2(L_0, z) dz$.

Au vu de la relation (2.10), on propose de définir l'opérateur \mathcal{E} de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{E} : \Lambda_{1D} &\longrightarrow \Lambda_{2D} \\ (u_1)_{|\Gamma} &\longmapsto (u_1)_{|\Gamma} \end{aligned}$$

C'est-à-dire pour tout $z \in (0, H)$, on a $(\mathcal{E}(u_1))(L_0, z) = u_1(L_0)$. Ceci signifie que l'on impose uniformément selon z la quantité $u_1(L_0)$.

Choix des opérateurs B_1 et B_2

Pour assurer la convergence dans le cadre de la décomposition de domaines classique de l'équation de Laplace, P.L Lions a proposé dans [27] d'utiliser des conditions aux limites de type Robin. On va dans la suite utiliser ce type d'opérateur. On définit les opérateurs B_1 et B_2 pour $\lambda > 0$ donné, par :

$$B_1 = \frac{\partial}{\partial n_1} + \lambda Id \quad (3.6)$$

et

$$B_2 = \frac{\partial}{\partial n_2} + \lambda Id \quad (3.7)$$

où n_1 et n_2 désignent respectivement la normale sortante au domaine 1-D et la normale sortante au domaine 2-D.

On note que l'opérateur B_1 est un opérateur 1-D et que B_2 est un opérateur 2-D. On note aussi que ces opérateurs permettent d'avoir des problèmes 1-D et 2-D bien posés à chaque itération de l'algorithme défini ci-dessus. Ces conditions sont dites *one-sided* car on utilise la même valeur de λ pour B_1 et B_2 .

Dans la suite on va étudier la convergence de l'algorithme (3.1) en utilisant les conditions (3.6) et (3.7).

Convergence de l'algorithme

En utilisant les opérateurs \mathcal{R} , \mathcal{E} , B_1 et B_2 définis ci-dessus, on a le résultat suivant :

Proposition 3.1. *Pour tout $\lambda > 0$, la suite (u_1^k, u_2^k) définie par l'algorithme de Schwarz 3.1 converge dans $H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2)$ vers $(u_1^\lambda, u_2^\lambda)$ qui vérifie les contraintes physiques de couplage (3.3a) et (3.3b).*

Démonstration :

On définit les différences entre deux itérations successives par :

$$e_1^{k+1}(x) = u_1^{k+1}(x) - u_1^k(x), \quad \forall x \in \Omega_1$$

et

$$e_2^{k+1}(x, z) = u_2^{k+1}(x, z) - u_2^k(x, z), \quad \forall (x, z) \in \Omega_2$$

Dans la suite de la démonstration, afin d'alléger l'écriture, on omettra les variables x et z sauf pour les termes définis sur les interfaces de couplage.

Les erreurs e_1^{k+1} et e_2^{k+1} sont alors solutions des systèmes suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial^2 e_1^{k+1}}{\partial x^2} + \frac{\kappa}{H} e_1^{k+1} = 0 \quad \text{dans } \Omega_1 \\ e_1^{k+1}(0) = 0 \\ \frac{\partial e_1^{k+1}}{\partial x}(L_0) + \lambda e_1^{k+1}(L_0) = \frac{\partial \bar{e}_2^k}{\partial x}(L_0) + \lambda \bar{e}_2^k(L_0) \end{array} \right. \quad (3.8)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta e_2^{k+1} = 0 & \text{dans } \Omega_2 \\ \frac{\partial e_2^{k+1}}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma_T^2 \\ \frac{\partial e_2^{k+1}}{\partial n} + \kappa e_2^{k+1} = 0 & \text{sur } \Gamma_B^2 \\ e_2^{k+1} = 0 & \text{sur } \Gamma_R \\ -\frac{\partial e_2^{k+1}}{\partial x}(L_0, z) + \lambda e_2^{k+1}(L_0, z) = -\frac{\partial e_1^{k+1}}{\partial x}(L_0) + \lambda e_1^{k+1}(L_0) & \text{sur } \Gamma \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (3.9a) \\ (3.9b) \\ (3.9c) \\ (3.9d) \\ (3.9e) \end{array}$$

La solution du système (3.8) est donnée par :

$$e_1^{k+1}(x) = \alpha_{k+1} \sinh(ax), \quad \forall x \in [0, L_0] \quad (3.10)$$

où $a = \sqrt{\frac{\kappa}{H}}$ et $\alpha_{k+1} \in \mathbb{R}$.

En moyennant selon z la condition aux limites (3.9e) sur le bord Γ et compte-tenu de la condition au point $x = L_0$ vérifiée par l'erreur 1-D, on a :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\frac{\partial \bar{e}_2^{k+1}}{\partial x}(L_0) + \lambda \bar{e}_2^{k+1}(L_0) & = -\frac{\partial e_1^{k+1}}{\partial x}(L_0) + \lambda e_1^{k+1}(L_0) \\ \frac{\partial \bar{e}_2^{k+1}}{\partial x}(L_0) + \lambda \bar{e}_2^{k+1}(L_0) & = \frac{\partial e_1^{k+2}}{\partial x}(L_0) + \lambda e_1^{k+2}(L_0) \end{array} \right.$$

d'où :

$$\begin{aligned} \bar{e}_2^{k+1}(L_0) &= \frac{1}{2\lambda} \left(\frac{\partial(e_1^{k+2} - e_1^{k+1})}{\partial x} + \lambda e_1^{k+2} + \lambda e_1^{k+1} \right) (L_0) \\ &= \frac{1}{2\lambda} (a\alpha_{k+2} \cosh(aL_0) - a\alpha_{k+1} \cosh(aL_0) + \lambda\alpha_{k+2} \sinh(aL_0) + \lambda\alpha_{k+1} \sinh(aL_0)) \\ &= \frac{1}{2\lambda} (A\alpha_{k+2} + B\alpha_{k+1}) \end{aligned} \quad (3.11)$$

où $A = a \cosh(aL_0) + \lambda \sinh(aL_0)$ et $B = -a \cosh(aL_0) + \lambda \sinh(aL_0)$.

De même on a :

$$\frac{\partial \bar{e}_2^{k+1}}{\partial x}(L_0) = \frac{1}{2} (A\alpha_{k+2} - B\alpha_{k+1}) \quad (3.12)$$

Maintenant, en multipliant la première équation du système (3.9) par e_2^{k+1} et en intégrant par parties, on a :

$$\int_{\Omega_2} |\nabla e_2^{k+1}|^2 dx dz - \int_{\partial\Omega_2} \frac{\partial e_2^{k+1}}{\partial n} e_2^{k+1} d\sigma = 0$$

En utilisant les conditions aux limites sur Γ_T et Γ_R , on obtient :

$$\int_{\Omega_2} |\nabla e_2^{k+1}|^2 dx dz + \int_{\Gamma_B^2} \kappa |e_2^{k+1}|^2 dx = - \int_{\Gamma} \frac{\partial e_2^{k+1}}{\partial x}(L_0, z) e_2^{k+1}(L_0, z) dz \quad (3.13)$$

On remplace ensuite $\frac{\partial e_2^{k+1}}{\partial x}(L_0, z)$ par sa valeur déduite de la condition de Robin (3.9e) sur Γ .
On a dans ce cas (on omet dx et dz pour plus de clarté) :

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_2} |\nabla e_2^{k+1}|^2 + \int_{\Gamma_B^2} \kappa |e_2^{k+1}|^2 &= \int_{\Gamma} \left(-\frac{\partial e_1^{k+1}}{\partial x}(L_0) + \lambda e_1^{k+1}(L_0) - \lambda e_2^{k+1}(L_0, z) \right) e_2^{k+1}(L_0, z) \\
&= \left(-\frac{\partial e_1^{k+1}}{\partial x} + \lambda e_1^{k+1} \right) (L_0) \int_0^H e_2^{k+1}(L_0, z) \\
&\quad - \lambda \int_0^H |e_2^{k+1}|^2(L_0, z) \\
&= B\alpha_{k+1} H \bar{e}_2^{k+1}(L_0) - \lambda \int_0^H |e_2^{k+1}|^2(L_0, z) \tag{3.14}
\end{aligned}$$

$$= \frac{B\alpha_{k+1}H}{2\lambda} (A\alpha_{k+2} + B\alpha_{k+1}) - \lambda \int_0^H |e_2^{k+1}|^2(L_0, z) \tag{3.15}$$

Maintenant, on remplace $e_2^{k+1}(L_0, z)$ dans (3.13) en utilisant la condition de Robin (3.9e) sur Γ :

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_2} |\nabla e_2^{k+1}|^2 dx dz + \int_{\Gamma_B^2} \kappa |e_2^{k+1}|^2 dx &= - \int_{\Gamma} \frac{1}{\lambda} \left(-\frac{\partial e_1^{k+1}}{\partial x}(L_0) + \lambda e_1^{k+1}(L_0) \right) \frac{\partial e_2^{k+1}}{\partial x}(L_0, z) dz \\
&\quad - \int_{\Gamma} \frac{1}{\lambda} \left| \frac{\partial e_2^{k+1}}{\partial x}(L_0, z) \right|^2 dz \\
&= -\frac{1}{\lambda} \left(-\frac{\partial e_1^{k+1}}{\partial x} + \lambda e_1^{k+1} \right) (L_0) \int_0^H \frac{\partial e_2^{k+1}}{\partial x}(L_0, z) dz \\
&\quad - \frac{1}{\lambda} \int_0^H \left| \frac{\partial e_2^{k+1}}{\partial x}(L_0, z) \right|^2 dz \\
&= -\frac{B\alpha_{k+1}H}{\lambda} \frac{\partial \bar{e}_2^{k+1}}{\partial x}(L_0) - \frac{1}{\lambda} \int_0^H \left| \frac{\partial e_2^{k+1}}{\partial x}(L_0, z) \right|^2 dz \\
&= -\frac{B\alpha_{k+1}H}{2\lambda} (A\alpha_{k+2} - B\alpha_{k+1}) - \frac{1}{\lambda} \int_0^H \left| \frac{\partial e_2^{k+1}}{\partial x}(L_0, z) \right|^2 dz
\end{aligned}$$

En utilisant l'hypothèse $\lambda > 0$, on déduit des deux relations qu'on vient d'établir que :

$$\frac{B\alpha_{k+1}H}{2\lambda} (A\alpha_{k+2} + B\alpha_{k+1}) \geq 0$$

et

$$-\frac{B\alpha_{k+1}H}{2\lambda} (A\alpha_{k+2} - B\alpha_{k+1}) \geq 0$$

d'où :

$$A^2\alpha_{k+2}^2 - B^2\alpha_{k+1}^2 \leq 0.$$

A partir de cette inégalité, on obtient :

$$\frac{\alpha_{k+2}^2}{\alpha_{k+1}^2} \leq \frac{B^2}{A^2} = \left| \frac{-a \cosh(aL_0) + \lambda \sinh(aL_0)}{a \cosh(aL_0) + \lambda \sinh(aL_0)} \right|^2 < 1 \quad (3.16)$$

et donc

$$\left| \frac{\alpha_{k+2}}{\alpha_{k+1}} \right| \leq \alpha < 1$$

La suite $(\alpha_k)_{k \geq 0}$ tend donc vers zéro.

On observe maintenant que pour tout $k \geq 0$ et pour tout $n \geq 0$, on a :

$$u_1^{k+n} - u_1^k = \sum_{p=0}^{n-1} e_1^{k+p+1}$$

et

$$\frac{\partial (u_1^{k+n} - u_1^k)}{\partial x} = \sum_{p=0}^{n-1} \frac{\partial e_1^{k+p+1}}{\partial x}$$

En utilisant la relation (3.10) et le fait que la suite $(|\alpha_k|)_{k \geq 0}$ est majorée par une suite géométrique (de raison < 1), on peut montrer que $(u_1^k)_{k \geq 0}$ et $(\frac{\partial u_1^k}{\partial x})_{k \geq 0}$ sont des suites de Cauchy dans $L^2(\Omega_1)$. De la même façon, on remarque que pour tout $k \geq 0$ et pour tout $n \geq 0$, on a :

$$\nabla(u_2^{k+n} - u_2^k) = \sum_{p=0}^{n-1} \nabla e_2^{k+p+1}$$

En utilisant (3.15), on déduit que :

$$\int_{\Omega_2} |\nabla e_2^{k+1}|^2 dx dz \leq \frac{B\alpha_{k+1}H}{2\lambda} (A\alpha_{k+2} + B\alpha_{k+1})$$

On en déduit donc que $(\nabla u_2^k)_{k \geq 0}$ est une suite de Cauchy dans $L^2(\Omega_2)$. En utilisant ensuite l'inégalité de Poincaré (Ω_2 est borné ici dans au moins une direction), on montre aussi que $(u_2^k)_{k \geq 0}$ est une suite de Cauchy dans $L^2(\Omega_2)$. Ce qui implique que $(u_2^k)_{k \geq 0}$ est une suite de Cauchy dans $H^1(\Omega_2)$.

Pour conclure, on a montré que la suite (u_1^k, u_2^k) converge dans $H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2)$. À convergence, la limite $(u_1^\lambda, u_2^\lambda)$ vérifie $B_1 u_1^\lambda = B_1 \bar{u}_2^\lambda$ et $B_2 u_2^\lambda = B_2(\mathcal{E} u_1^\lambda)$. En effectuant ensuite la moyenne verticale sur Γ , on obtient deux combinaisons linéaires indépendantes des contraintes physiques (3.3a) et (3.3b), qui sont donc bien satisfaites. \square

Remarques :

- La convergence de l'algorithme de couplage est valable pour tout $\lambda > 0$, mais on peut remarquer que pour $\lambda = a \coth(aL_0)$, on a convergence exacte en deux itérations. En effet, dans ce cas on a :

$$-\frac{\partial e_1^{k+1}}{\partial x} + \lambda e_1^{k+1} = 0 \quad \forall k \geq 0,$$

et donc :

$$B_2 e_2^{k+1} = -\frac{\partial e_2^{k+1}}{\partial x} + \lambda e_2^{k+1} = 0 \quad \forall k \geq 0,$$

ce qui implique que $e_2^{k+1} = 0$, pour $k \geq 0$ car solution d'une équation homogène avec des conditions aux limites homogènes.

L'opérateur $\frac{\partial}{\partial n_1} + a \coth(aL_0)Id$ correspond à l'opérateur absorbant exact du modèle 1-D (voir par exemple [23]).

On note dans la suite λ_{opt} cette valeur de λ .

- À la différence du cas mono-dimensionnel, pour chaque λ il y a convergence vers une solution $(u_1^\lambda, u_2^\lambda)$ a priori différente, qui dépend donc de λ .

Par exemple, si on note $(u_1^{\lambda_{opt}}, u_2^{\lambda_{opt}})$ les limites obtenues à convergence de l'algorithme pour $\lambda_{opt} = a \coth(aL_0)$ et $(u_1^\lambda, u_2^\lambda)$ correspondant à $\lambda \neq \lambda_{opt}$, on a alors $u_1^{\lambda_{opt}} - u_1^\lambda$ solution de :

$$\begin{cases} -\frac{\partial^2(u_1^{\lambda_{opt}} - u_1^\lambda)}{\partial x^2} + \frac{\kappa}{H}(u_1^{\lambda_{opt}} - u_1^\lambda) = 0 & \text{dans } \Omega_1 \\ (u_1^{\lambda_{opt}} - u_1^\lambda)(0) = 0 \\ \frac{\partial(u_1^{\lambda_{opt}} - u_1^\lambda)}{\partial x} + \lambda_{opt} u_1^{\lambda_{opt}} - \lambda u_1^\lambda = \frac{\partial(\bar{u}_2^{\lambda_{opt}} - \bar{u}_2^\lambda)}{\partial x} + \lambda_{opt} \bar{u}_2^{\lambda_{opt}} - \lambda \bar{u}_2^\lambda \end{cases} \quad (3.17)$$

et $u_2^{\lambda_{opt}} - u_2^\lambda$ vérifie le système :

$$\begin{cases} -\Delta(u_2^{\lambda_{opt}} - u_2^\lambda) = 0 & \text{dans } \Omega_2 \\ \frac{\partial(u_2^{\lambda_{opt}} - u_2^\lambda)}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma_T^2 \\ \frac{\partial(u_2^{\lambda_{opt}} - u_2^\lambda)}{\partial n} + \kappa(u_2^{\lambda_{opt}} - u_2^\lambda) = 0 & \text{sur } \Gamma_B^2 \\ u_2^{\lambda_{opt}} - u_2^\lambda = 0 & \text{sur } \Gamma_R \\ -\frac{\partial(u_2^{\lambda_{opt}} - u_2^\lambda)}{\partial x} + \lambda_{opt} u_2^{\lambda_{opt}} - \lambda u_2^\lambda = -\frac{\partial(u_1^{\lambda_{opt}} - u_1^\lambda)}{\partial x} + \lambda_{opt} u_1^{\lambda_{opt}} - \lambda u_1^\lambda & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (3.18)$$

D'après le système (3.17) on peut déduire que $(u_1^{\lambda_{opt}} - u_1^\lambda)(x) = \alpha \sinh(ax)$, $\forall x \in \Omega_1$, où α désigne un réel.

Ensuite, en reprenant la condition sur l'interface Γ , on a :

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial(u_2^{\lambda_{opt}} - u_2^\lambda)}{\partial x}(L_0, z) + (\lambda_{opt}u_2^{\lambda_{opt}} - \lambda u_2^\lambda)(L_0, z) &= \left(-\frac{\partial(u_1^{\lambda_{opt}} - u_1^\lambda)}{\partial x} + \lambda_{opt}u_1^{\lambda_{opt}} \right)(L_0) \\
&\quad - \lambda u_1^\lambda(L_0) \\
&= -\alpha a \cosh(aL_0) - \lambda u_1^\lambda(L_0) \\
&\quad + \lambda_{opt} \left(\alpha \sinh(aL_0) + u_1^\lambda(L_0) \right) \\
&= (\lambda_{opt} - \lambda)u_1^\lambda(L_0)
\end{aligned}$$

D'où :

$$-\frac{\partial(u_2^{\lambda_{opt}} - u_2^\lambda)}{\partial x}(L_0, z) + \lambda_{opt}(u_2^{\lambda_{opt}} - u_2^\lambda)(L_0, z) = (\lambda_{opt} - \lambda)(u_1^\lambda(L_0) - u_2^\lambda(L_0, z))$$

On peut donc déduire que $u_2^\lambda = u_2^{\lambda_{opt}}$ est solution du système (3.18) si et seulement si $u_2^\lambda(L_0, z) = u_1^\lambda(L_0)$, $\forall z \in [0, H]$. Mais rien a priori n'assure cette condition. Ceci est en concordance avec le caractère mal posé du problème couplé.

Afin de simplifier, on notera par la suite (u_1, u_2) la limite de l'algorithme de Schwarz au lieu de $(u_1^\lambda, u_2^\lambda)$.

- On peut noter que remplacer l'opérateur 2-D par tout autre opérateur elliptique mènerait à une démonstration de convergence identique. Il serait simplement nécessaire que le modèle 2-D soit bien posé avec l'ensemble des conditions limites imposées.
- La convergence de l'algorithme est assurée quelle que soit la position de l'interface de couplage.
- La suite (u_2^k) ne converge pas forcément vers $u|_{\Omega_2}$, ceci étant dû au choix de l'opérateur \mathcal{E} uniforme en z . On fera dans le paragraphe 3.1.2 la comparaison de la solution de la partie 2-D du modèle de couplage avec la restriction de la solution globale u sur Ω_2 .
- On peut aussi exploiter les opérateurs absorbants dans l'autre sens, c'est à dire du modèle 2-D vers le modèle 1-D. Il suffit dans ce cas de moyenner verticalement l'opérateur absorbant 2-D et de le passer au modèle 1-D. En revanche, il est plus délicat dans le cas d'un modèle de dimension supérieure de disposer de l'expression exacte de l'opérateur absorbant.

3.1.2 Comparaison de la solution du modèle couplé avec la solution de référence

On vient d'établir la convergence de l'algorithme de couplage de type Schwarz avec des conditions de type Robin *one-sided*. La solution obtenue est une solution du modèle couplé et on a vu en plus qu'elle dépend du choix de λ . On ne s'attend donc pas à avoir une solution 2-D dans Ω_2 qui soit la restriction de la solution globale mono-domaine sur ce sous-domaine. Le but de ce paragraphe est d'établir l'expression de l'erreur, selon une certaine norme à définir, entre la solution de la partie 2-D du modèle couplé et la solution de référence dans Ω_2 , et de quantifier

cette erreur en fonction de ε .

On a le résultat suivant :

Proposition 3.2. *Pour $\lambda > 0$ fixé quelconque, on note (u_1, u_2) la limite de l'algorithme 3.1. Si $L_0 < L_1$ (c'est à dire si le choix de la position de l'interface est valide) alors il existe $M > 0$ dépendant de λ et u tel que :*

$$\|u|_{\Omega_2} - u_2\|_{H^1(\Omega_2)}^2 \leq M(\lambda, u)(1 + \delta^2)\varepsilon^2$$

où $\delta = \frac{L_1}{L_1 - L_0}$ varie avec la position de l'interface et où $\varepsilon = \frac{h}{L_1}$ est fixé et supposé petit.

Démonstration

La fonction $u - u_2$ vérifie le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta(u - u_2) = 0 \quad \text{dans } \Omega_2 \\ \frac{\partial(u - u_2)}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_T^2 \\ \frac{\partial(u - u_2)}{\partial n} + \kappa(u - u_2) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_B^2 \\ u - u_2 = 0 \quad \text{sur } \Gamma_R \end{array} \right.$$

En multipliant la première équation de ce système par $u - u_2$ et en utilisant les conditions aux limites sur $\Gamma_T^2 \cup \Gamma_B^2 \cup \Gamma_R$, on obtient :

$$\int_{\Omega_2} |\nabla(u - u_2)|^2 dx dz + \int_{\Gamma_B^2} \kappa |u - u_2|^2 dx - \int_{\Gamma} \frac{\partial(u - u_2)}{\partial n} (u - u_2) dz = 0 \quad (3.19)$$

En utilisant la condition $-\frac{\partial u_2}{\partial x} + \lambda u_2 = -\frac{\partial u_1}{\partial x} + \lambda u_1$ sur l'interface Γ satisfaite par la limite u_2 , on obtient (on omet le dz pour plus de lisibilité) :

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma} \frac{\partial(u-u_2)}{\partial n} (u-u_2)(L_0, z) &= - \int_0^H \frac{\partial(u-u_2)}{\partial x} (u-u_2)(L_0, z) \\
&= - \int_0^H \frac{\partial u}{\partial x} (u-u_2)(L_0, z) \\
&\quad - \int_0^H \left(-\frac{\partial u_1}{\partial x}(L_0) + \lambda u_1(L_0) - \lambda u_2(L_0, z) \right) (u-u_2)(L_0, z) \\
&= - \int_0^H \frac{\partial u}{\partial x} (u-u_2)(L_0, z) \\
&\quad - \int_0^H \left(-\frac{\partial u_1}{\partial x}(L_0) + \lambda u_1(L_0) - \lambda u(L_0, z) \right) (u-u_2)(L_0, z) \\
&\quad - \lambda \int_0^H (u-u_2)^2(L_0, z) \\
&= \int_0^H \left(-\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda u \right) (u-u_2)(L_0, z) \\
&\quad - \int_0^H \left(-\frac{\partial u_1}{\partial x} + \lambda u_1 \right) (L_0) (u-u_2)(L_0, z) \\
&\quad - \lambda \int_0^H (u-u_2)^2(L_0, z) \tag{3.20}
\end{aligned}$$

On va maintenant examiner un par un les différents termes.

- Le premier terme de (3.20) s'écrit :

$$\begin{aligned}
\int_0^H \left(-\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda u \right) (u-u_2)(L_0, z) dz &= \int_0^H \left(-\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda u \right) (L_0, z) (u(L_0, z) - \bar{u}(L_0)) dz \\
&\quad + \int_0^H \left(-\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda u \right) (L_0, z) (\bar{u} - u_1)(L_0) dz \\
&\quad + \int_0^H \left(-\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda u \right) (L_0, z) (u_1(L_0) - u_2(L_0, z)) dz
\end{aligned}$$

D'après les relations (2.9) et (2.10), on a :

$$u(L_0, z) = \bar{u}(L_0) + O(\varepsilon^2), \quad \forall z \in [0, H]$$

Ensuite, on a :

$$u(L_0, z) = O(1) \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L_0, z) = O(1) \tag{3.21}$$

En effet, si on suppose qu'il existe $z \in [0, H]$ et $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que :

$$u(L_0, z) = O\left(\frac{1}{\varepsilon^\alpha}\right) \quad \text{et/ou} \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L_0, z) = O\left(\frac{1}{\varepsilon^\beta}\right)$$

cela signifie d'après la relation (2.5), que :

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}}(L_0, 0) = O(\varepsilon^{2-\alpha})$$

ce qui est en contradiction avec la relation (2.8) établie dans le chapitre 2.
On peut déduire que :

$$\int_0^H \left(-\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda u \right) (L_0, z) (u(L_0, z) - \bar{u}(L_0)) dz = O(\varepsilon^2) \quad (3.22)$$

De la même façon, si on suppose que $L_0 < L_1$ et grâce aux hypothèses (2.6) appliquées maintenant à u_2 , on peut effectuer une analyse asymptotique similaire à celle faite dans le chapitre 2 dans $\Omega_2 \cap \{L_0 \leq x \leq L_1\}$. On obtient dans ce cas :

$$\begin{aligned} u_2(L_0, z) &= \bar{u}_2(L_0) + O(\delta^2 \varepsilon^2) \\ &= u_1(L_0) + O(\delta^2 \varepsilon^2), \quad \forall z \in [0, H] \end{aligned} \quad (3.23)$$

et donc :

$$\int_0^H \left(-\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda u \right) (L_0, z) (u_1(L_0) - u_2(L_0, z)) dz = O(\delta^2 \varepsilon^2) \quad (3.24)$$

Enfin :

$$\int_0^H \left(-\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda u \right) (L_0, z) (\bar{u} - u_1)(L_0) dz = H \left(-\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \lambda \bar{u} \right) (\bar{u} - u_1)(L_0) \quad (3.25)$$

• Grâce à la relation $u_1(L_0) = \bar{u}_2(L_0)$, le deuxième terme de (3.20) s'écrit :

$$\begin{aligned} - \int_0^H \left(-\frac{\partial u_1}{\partial x} + \lambda u_1 \right) (L_0) (u - u_2)(L_0, z) dz &= -H \left(-\frac{\partial u_1}{\partial x} + \lambda u_1 \right) (\bar{u} - u_1)(L_0) \\ &= -H \left(-\frac{\partial(u_1 - \bar{u})}{\partial x} + \lambda(u_1 - \bar{u}) \right) (\bar{u} - u_1)(L_0) \\ &\quad - H \left(-\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \lambda \bar{u} \right) (\bar{u} - u_1)(L_0) \end{aligned} \quad (3.26)$$

Ensuite, on va reformuler le terme de droite. Les fonctions u_1 et \bar{u} vérifient respectivement les équations :

$$-\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}(x) + a^2 u_1(x) = F_1(x), \quad \forall x \in [0, L_0]$$

et

$$-\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2}(x) + a^2 \bar{u}(x) = F_1(x), \quad \forall x \in [0, L_0]$$

$u_1 - \bar{u}$ vérifie donc l'équation suivante :

$$-\frac{\partial^2(u_1 - \bar{u})}{\partial x^2}(x) + a^2(u_1 - \bar{u}) = a^2(\bar{u}(x) - u(x, 0)), \quad \forall x \in [0, L_0]$$

En multipliant cette équation par $u_1 - \bar{u}$, en intégrant sur $[0, L_0]$, en faisant une intégration par parties et en utilisant le fait que $u_1(0) = \bar{u}(0)$, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^{L_0} \left(\frac{\partial(u_1 - \bar{u})}{\partial x} \right)^2(x) dx + a^2 \int_0^{L_0} (u_1 - \bar{u})^2(x) dx - \frac{\partial(u_1 - \bar{u})}{\partial x}(L_0)(u_1 - \bar{u})(L_0) = \\ \int_0^{L_0} a^2(\bar{u}(x) - u(x, 0))(u_1(x) - \bar{u}) dx \end{aligned}$$

D'où :

$$-\frac{\partial(u_1 - \bar{u})}{\partial x}(u_1 - \bar{u})(L_0) = \int_0^{L_0} a^2(\bar{u}(x) - u(x, 0))(u_1(x) - \bar{u})dx - \mathcal{A}_1(u_1 - \bar{u}, u_1 - \bar{u})$$

$$\text{où } \mathcal{A}_1(u_1 - \bar{u}, u_1 - \bar{u}) = \int_0^{L_0} \left(\frac{\partial(u_1 - \bar{u})}{\partial x} \right)^2(x)dx + a^2 \int_0^{L_0} (u_1 - \bar{u})^2(x)dx.$$

Et donc (3.26) devient :

$$\begin{aligned} - \int_0^H \left(-\frac{\partial u_1}{\partial x} + \lambda u_1 \right) (L_0) (u - u_2) (L_0, z) dz &= -H \left(-\frac{\partial(u_1 - \bar{u})}{\partial x} + \lambda(u_1 - \bar{u}) \right) (\bar{u} - u_1) (L_0) \\ &\quad - H \left(-\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \lambda \bar{u} \right) (L_0) (\bar{u} - u_1) (L_0) \\ &= \left(-H \frac{\partial(u_1 - \bar{u})}{\partial x} (u_1 - \bar{u}) + \lambda H (\bar{u} - u_1)^2 \right) (L_0) \\ &\quad - H \left(-\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \lambda \bar{u} \right) (\bar{u} - u_1) (L_0) \\ &= H \int_0^{L_0} a^2(\bar{u}(x) - u(x, 0))(u_1(x) - \bar{u})dx \\ &\quad - H \mathcal{A}_1(u_1 - \bar{u}, u_1 - \bar{u}) + \lambda H (\bar{u} - u_1)^2 (L_0) \\ &\quad - H \left(-\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \lambda \bar{u} \right) (\bar{u} - u_1) (L_0) \end{aligned} \quad (3.27)$$

• Pour récapituler, l'équation (3.20) devient :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \frac{\partial(u - u_2)}{\partial n} (u - u_2) (L_0, z) dz &= \int_0^H \left(-\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda u \right) (u - u_2) (L_0, z) dz \\ &\quad - \int_0^H \left(-\frac{\partial u_1}{\partial x} + \lambda u_1 \right) (L_0) (u - u_2) (L_0, z) dz \\ &\quad - \lambda \int_0^H (u - u_2)^2 (L_0, z) dz \\ &= O(\varepsilon^2) + O(\delta^2 \varepsilon^2) + H \int_0^{L_0} a^2(\bar{u}(x) - u(x, 0))(u_1(x) - \bar{u})dx \\ &\quad - H \mathcal{A}_1(u_1 - \bar{u}, u_1 - \bar{u}) + \lambda H (\bar{u} - u_1)^2 (L_0) \\ &\quad - \lambda \int_0^H (u - u_2)^2 dz \end{aligned}$$

(le terme (3.25) se simplifiant avec (3.27)).

Ensuite :

$$\int_0^{L_0} a^2(\bar{u}(x) - u(x, 0))(u_1(x) - \bar{u})dx \leq \frac{a^2}{2} \int_0^{L_0} (\bar{u}(x) - u(x, 0))^2 dx + \frac{a^2}{2} \int_0^{L_0} (u_1(x) - \bar{u}(x))^2 dx$$

D'où

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma} \frac{\partial(u - u_2)}{\partial n} (u - u_2) dz &\leq O(\varepsilon^2) + O(\delta^2 \varepsilon^2) + H \frac{a^2}{2} \int_0^{L_0} (\bar{u}(x) - u(x, 0))^2 dx \\
&\quad - H \mathcal{A}_1(u_1 - \bar{u}, u_1 - \bar{u}) + H \frac{a^2}{2} \int_0^{L_0} (u_1(x) - \bar{u}(x))^2 dx \\
&\quad + \lambda H (\bar{u} - u_1)^2(L_0) - \lambda \int_0^H (u - u_2)^2 dz
\end{aligned}$$

Ensuite il suffit de remarquer que :

$$- \mathcal{A}_1(u_1 - \bar{u}, u_1 - \bar{u}) + \frac{a^2}{2} \int_0^{L_0} (u_1(x) - \bar{u}(x))^2 dx \leq 0$$

et que :

$$\begin{aligned}
\lambda H (\bar{u} - u_1)^2(L_0) - \lambda \int_0^H (u - u_2)^2 dz &= \lambda H \left(\frac{1}{H} \int_0^H (u - u_2) dz \right)^2 \\
&\quad - \lambda \int_0^H (u - u_2)^2 dz \\
&= \lambda \frac{1}{H} \left(\int_0^H (u - u_2) dz \right)^2 - \lambda \int_0^H (u - u_2)^2 dz \\
&\leq \lambda \frac{1}{H} \left(\int_0^H 1 \right) \left(\int_0^H (u - u_2)^2 \right) - \lambda \int_0^H (u - u_2)^2 \\
&\leq 0
\end{aligned}$$

Donc en revenant à la relation (3.19) et en utilisant le fait que $\bar{u}(x) = u(x, 0) + O(\varepsilon^2)$, on obtient :

$$\int_{\Omega_2} |\nabla(u - u_2)|^2 dx dz + \int_{\Gamma_B^2} \kappa |u - u_2|^2 dx \leq C(\lambda, u)(1 + \delta^2)\varepsilon^2$$

où $C(\lambda, u)$ est une constante positive qui, étant données les relations (3.21), (3.22) et (3.24), dépend de λ et de u . D'où :

$$\int_{\Omega_2} |\nabla(u - u_2)|^2 dx dz \leq C(\lambda, u)(1 + \delta^2)\varepsilon^2$$

Ensuite, comme $u - u_2 = 0$ sur Γ_R , on peut utiliser l'inégalité de Poincaré qui permet de conclure qu'il existe $M > 0$ dépendant de λ , u et du domaine Ω_2 tel que :

$$\|u|_{\Omega_2} - u_2\|_{H^1(\Omega_2)}^2 \leq M(\lambda, u)(1 + \delta^2)\varepsilon^2$$

□

Remarques :

- Cette majoration de l'erreur permet de donner une idée du comportement de celle-ci quand ε devient très petit.

- Cette proposition n'est plus valable si l'interface est positionnée dans une zone où les effets 2-D ne sont pas négligeables. En effet, rien ne garantit alors que $\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2} = O(1)$.
- La dépendance de M en λ est continue.
- De même, on peut majorer $\|u_2^{\lambda_1} - u_2^{\lambda_2}\|_{H^1(\Omega_2)}^2$ par $M(\lambda_1, \lambda_2, u)(1 + \delta^2)\varepsilon^2$ pour tous λ_1 et λ_2 strictement positifs.

3.2 Extension au cas 2-D/3-D

La démarche précédente est assez générique et peut être étendue en dimension supérieure. On va donc étudier le cas d'un couplage de modèles 2-D/3-D dans cette section.

3.2.1 Modèles à coupler dans le cas de domaines semi-infinis

Les sous-domaines sont ici $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^2$ et $\Omega_3 \subset \mathbb{R}^3$. Pour des raisons de simplicité dans le calcul de l'opérateur absorbant 2-D, on choisit Ω_2 semi-infini : $\Omega_2 = \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}$. Le domaine Ω_3 est lui de la forme $\Omega_3 = \Omega^+ \times (0, H)$ où Ω^+ désigne l'ouvert de \mathbb{R}^2 défini par $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$. Les systèmes que l'on considère sont :

$$\text{Modèle 2-D : } \begin{cases} -\Delta u_2 + \frac{\kappa}{H} u_2 = F_2 & \text{dans } \Omega_2 \\ \|u_2\|_{L^2(\Omega_2)} \rightarrow 0 & \text{quand } |x|, |y| \rightarrow +\infty \end{cases} \quad (3.28)$$

et

$$\text{Modèle 3-D : } \begin{cases} -\Delta u_3 = F_3 & \text{dans } \Omega_3 \\ \frac{\partial u_3}{\partial n} = 0 & \text{sur } \{z = H\} \\ \frac{\partial u_3}{\partial n} + \kappa u_3 = 0 & \text{sur } \{z = 0\} \\ \|u_3\|_{L^2(\Omega_3)} \rightarrow 0 & \text{quand } |x|, |y| \rightarrow +\infty \end{cases} \quad (3.29)$$

De même que dans le cas 1-D/2-D, ces deux modèles doivent vérifier sur l'interface γ positionnée en $x = 0$ les conditions physiques suivantes :

$$\begin{cases} u_2(0, y) = \frac{1}{H} \int_0^H u_3(0, y, z) dz \end{cases} \quad (3.30a)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u_2}{\partial x}(0, y) = \frac{1}{H} \int_0^H \frac{\partial u_3}{\partial x}(0, y, z) dz \end{cases} \quad (3.30b)$$

3.2.2 Convergence de l'algorithme de couplage avec des conditions de type Robin

Pour coupler les modèles (3.28) et (3.29), on propose un algorithme itératif similaire à l'algorithme (3.1). A l'itération k les conditions aux limites sur les interfaces γ et Γ s'écrivent :

$$\frac{\partial u_2^{k+1}}{\partial x}(0, y) + \lambda u_2^{k+1}(0, y) = \frac{\partial \bar{u}_3^k}{\partial x}(0, y) + \lambda \bar{u}_3^k(0, y) \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad (3.31)$$

et

$$-\frac{\partial u_3^{k+1}}{\partial x}(0, y, z) + \lambda u_3^{k+1}(0, y, z) = -\frac{\partial u_2^{k+1}}{\partial x}(0, y) + \lambda u_2^{k+1}(0, y) \quad \forall (y, z) \in \mathbb{R} \times (0, H) \quad (3.32)$$

On a alors le résultat suivant :

Proposition 3.3. *Pour tout $\lambda > 0$, si $u_3^0 \in H^1(\Omega_3)$ alors l'algorithme de Schwarz défini par (u_2^k, u_3^k) et muni des conditions aux limites (3.31) et (3.32) converge dans $H^1(\Omega_2) \times H^1(\Omega_3)$ vers $(u_2^\lambda, u_3^\lambda)$ vérifiant les contraintes physiques de couplage (3.30a) et (3.30b).*

Démonstration :

Pour montrer la convergence de l'algorithme, on va considérer les différences entre deux itérés successifs définies par :

$$e_2^{k+1}(x, y) = u_2^{k+1}(x, y) - u_2^k(x, y) \quad \text{dans } \Omega_2$$

et

$$e_3^{k+1}(x, y, z) = u_3^{k+1}(x, y, z) - u_3^k(x, y, z) \quad \text{dans } \Omega_3$$

Les transformées de Fourier en y de ces deux fonctions vérifient les systèmes suivants :

$$\begin{cases} -\frac{\partial^2 \hat{e}_2^{k+1}}{\partial x^2} + \left(\eta^2 + \frac{\kappa}{H}\right) \hat{e}_2^{k+1} = 0 & \text{pour } x \leq 0, \eta \in \mathbb{R} \\ \frac{\partial \hat{e}_2^{k+1}}{\partial x}(0, \eta) + \lambda \hat{e}_2^{k+1}(0, \eta) = \frac{\partial \hat{e}_2^{k+1}}{\partial x}(0, \eta) + \lambda \hat{e}_3^{k+1}(0, \eta) & \text{pour } \eta \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (3.33)$$

et

$$\begin{cases} -\Delta_{x,z} \hat{e}_3^{k+1} + \eta^2 \hat{e}_3^{k+1} = 0 & \text{pour } x \geq 0, z \in (0, H) \text{ et } \eta \in \mathbb{R} \\ \frac{\partial \hat{e}_3^{k+1}}{\partial n} = 0 & \text{pour } x \geq 0, z = H \text{ et } \eta \in \mathbb{R} \\ \frac{\partial \hat{e}_3^{k+1}}{\partial n} + \kappa \hat{e}_3^{k+1} = 0 & \text{pour } x \geq 0, z = 0 \text{ et } \eta \in \mathbb{R} \\ -\frac{\partial \hat{e}_3^{k+1}}{\partial x}(0, \eta, z) + \lambda \hat{e}_3^{k+1}(0, \eta, z) = -\frac{\partial \hat{e}_2^{k+1}}{\partial x}(0, \eta) + \lambda \hat{e}_2^{k+1}(0, \eta) & \text{pour } z \in (0, H) \text{ et } \eta \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (3.34)$$

où $\Delta_{x,z}$ désigne l'opérateur $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

En cherchant une solution de (3.33) qui décroît à l'infini, \hat{e}_2^{k+1} s'écrit :

$$\hat{e}_2^{k+1}(x, \eta) = \alpha_{k+1} \exp\left(x \sqrt{\eta^2 + \frac{\kappa}{H}}\right) \quad (3.35)$$

Maintenant le reste de la démonstration de la convergence de l'algorithme est similaire au cas 1-D/2-D. En effet on a :

$$\begin{cases} -\frac{\partial \bar{e}_3^{k+1}}{\partial x}(0, \eta) + \lambda \bar{e}_3^{k+1}(0, \eta) &= -\frac{\partial \hat{e}_2^{k+1}}{\partial x}(0, \eta) + \lambda \hat{e}_2^{k+1}(0, \eta) \\ \frac{\partial \bar{e}_3^{k+1}}{\partial x}(0, \eta) + \lambda \bar{e}_3^{k+1}(0, \eta) &= \frac{\partial \hat{e}_2^{k+2}}{\partial x}(0, \eta) + \lambda \hat{e}_2^{k+2}(0, \eta) \end{cases}$$

d'où :

$$\begin{aligned} \bar{e}_3^{k+1}(0, \eta) &= \frac{1}{2\lambda} \left(\left(\lambda + \sqrt{\eta^2 + \frac{\kappa}{H}} \right) \alpha_{k+2} + \left(\lambda - \sqrt{\eta^2 + \frac{\kappa}{H}} \right) \alpha_{k+1} \right) \\ &= \frac{1}{2\lambda} (A\alpha_{k+2} + B\alpha_{k+1}) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{e}_3^{k+1}}{\partial x}(0, k) &= \frac{1}{2} \left(\left(\lambda + \sqrt{\eta^2 + \frac{\kappa}{H}} \right) \alpha_{k+2} - \left(\lambda - \sqrt{\eta^2 + \frac{\kappa}{H}} \right) \alpha_{k+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} (A\alpha_{k+2} - B\alpha_{k+1}) \end{aligned}$$

Ensuite comme dans le cas 1-D/2-D, on peut montrer que d'un côté on a :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times (0, H)} |\nabla_{x,z} \hat{e}_3^{k+1}|^2 + \int_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times (0, H)} \eta^2 |\hat{e}_3^{k+1}|^2 &+ \int_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}} \kappa |\hat{e}_3^{k+1}|^2 = -\lambda \int_{\mathbb{R}} |\hat{e}_3^{k+1}|^2(0, \eta) \\ &+ \frac{B\alpha_{k+1}H}{2\lambda} (A\alpha_{k+2} + B\alpha_{k+1}) \end{aligned} \quad (3.36)$$

D'un autre côté on a :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times (0, H)} |\nabla_{x,z} \hat{e}_3^{k+1}|^2 + \int_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times (0, H)} \eta^2 |\hat{e}_3^{k+1}|^2 &+ \int_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}} \kappa |\hat{e}_3^{k+1}|^2 = -\frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial \hat{e}_3^{k+1}}{\partial x} \right|^2(0, \eta) \\ &- \frac{B\alpha_{k+1}H}{2\lambda} (A\alpha_{k+2} - B\alpha_{k+1}) \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$A^2 \alpha_{k+2}^2 - B^2 \alpha_{k+1}^2 \leq 0$$

D'où :

$$\frac{\alpha_{k+2}^2}{\alpha_{k+1}^2} \leq \left| \frac{\lambda - \sqrt{\eta^2 + \frac{\kappa}{H}}}{\lambda + \sqrt{\eta^2 + \frac{\kappa}{H}}} \right|^2 < 1 \quad (3.37)$$

La suite $(\alpha_k)_{k \geq 0}$ tend donc vers zéro.

Comme dans le cas 1-D/2-D, $\forall k \geq 0$ et $\forall n \geq 0$ on a :

$$\begin{aligned} (1 + \eta^2)^{\frac{1}{2}} (\hat{u}_2^{k+n}(x, \eta) - \hat{u}_2^k(x, \eta)) &= (1 + \eta^2)^{\frac{1}{2}} \sum_{p=0}^{n-1} \hat{e}_2^{k+p+1} \\ &= (1 + \eta^2)^{\frac{1}{2}} \exp \left(x \sqrt{\eta^2 + \frac{\kappa}{H}} \right) \sum_{p=0}^{n-1} \alpha^{k+p+1} \end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$\int_{\mathbb{R}} (1 + \eta^2) |\hat{u}_2^{k+n}(x, \eta) - \hat{u}_2^k(x, \eta)|^2 d\eta \leq \left| \sum_{p=0}^{n-1} \alpha^{k+p+1} \right|^2 \int_{\mathbb{R}} (1 + \eta^2) \exp \left(2x \sqrt{\eta^2 + \frac{\kappa}{H}} \right) d\eta$$

Ensuite, il suffit de voir que la fonction $\eta \mapsto (1 + \eta^2)^{\frac{1}{2}} \exp \left(x \sqrt{\eta^2 + \frac{\kappa}{H}} \right)$ appartient à $L^2(\mathbb{R})$ et que la suite $(\alpha_k)_{k \geq 0}$ est majorée par une suite géométrique dont le module de la raison est inférieur strictement à 1 pour déduire que la suite $\left((1 + \eta^2)^{\frac{1}{2}} \hat{u}_2^k(x, \eta) \right)_{k \geq 0}$ est une suite de Cauchy dans $L^2(\mathbb{R})$. D'où $(u_2^k)_{k \geq 0}$ est une suite de Cauchy dans $H^1(\Omega_2)$.

De même pour tout $k \geq 0$ pour tout $n \geq 0$, on a :

$$\nabla(u_3^{k+n} - u_3^k) = \sum_{p=0}^{n-1} \nabla e_3^{k+p+1}$$

A partir de de (3.36), on déduit que :

$$\int_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times (0, H)} |\nabla_{x,z} \hat{e}_3^{k+1}|^2 + \int_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times (0, H)} \eta^2 |\hat{e}_3^{k+1}|^2 \leq \frac{B\alpha_{k+1}H}{2\lambda} (A\alpha_{k+2} + B\alpha_{k+1})$$

Ensuite, en utilisant l'égalité de Parseval et le fait que la suite $(\alpha_k)_{k \geq 0}$ est majorée par une suite géométrique dont le module de la raison est strictement inférieur à 1, on montre que la suite $(\nabla u_3^k)_{k \geq 0}$ est de Cauchy dans $L^2(\Omega_3)$. Enfin, on finit la démonstration en utilisant le fait que Ω_3 est borné dans la direction z ; l'inégalité de Poincaré implique que $(u_3^k)_{k \geq 0}$ est une suite de Cauchy dans $L^2(\Omega_3)$. Donc $(u_3^k)_{k \geq 0}$ est une suite de Cauchy dans $H^1(\Omega_3)$. \square

3.2.3 Convergence de l'algorithme de couplage dans le cas de domaines bornés

On a choisi dans le paragraphe précédent des modèles 2-D et 3-D définis sur des domaines Ω_2 et Ω_3 semi-infinis. La convergence de l'algorithme de couplage a été prouvée en utilisant la transformée de Fourier, ce qui permet grâce à la relation (3.37) d'optimiser le taux de convergence de cet algorithme (on en donnera plus de détails dans §3.2.4).

Cependant, on peut considérer un problème de couplage dans des domaines bornés inclus respectivement dans \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 de la forme $\Omega_2 = (-L_1, 0) \times (0, L_y)$ et $\Omega_3 = (0, L_2) \times (0, L_y) \times (0, H)$. On définit dans ce cas le problème couplé par :

$$\text{modèle 2-D : } \begin{cases} -\Delta u_2 + \frac{\kappa}{H} u_2 = F_2 & \text{dans } \Omega_2 \\ u_2 = u_2^d & \text{sur } \partial\Omega_2 \setminus \gamma \end{cases} \quad (3.38)$$

et

$$\text{modèle 3-D : } \begin{cases} -\Delta u_3 = F_3 & \text{dans } \Omega_3 \\ \frac{\partial u_3}{\partial n} = 0 & \text{sur } \{z = H\} \\ \frac{\partial u_3}{\partial n} + \kappa u_3 = 0 & \text{sur } \{z = 0\} \\ u_3 = u_3^d & \text{sur } \partial\Omega_3 \setminus \Gamma_T^3 \cup \Gamma_B^3 \cup \Gamma \end{cases} \quad (3.39)$$

où $\Gamma_B^3 = \Gamma_B \cap \partial\Omega_3 = \{z = 0\} \cap \{x > 0\}$ et $\Gamma_T^3 = \Gamma_T \cap \partial\Omega_3 = \{z = H\} \cap \{x > 0\}$.

Ces deux modèles doivent vérifier sur l'interface γ positionnée en $x = 0$ les conditions physiques suivantes :

$$\begin{cases} u_2(0, y) = \frac{1}{H} \int_0^H u_3(0, y, z) dz & \forall y \in (0, L_y) \\ \frac{\partial u_2}{\partial x}(0, y) = \frac{1}{H} \int_0^H \frac{\partial u_3}{\partial x}(0, y, z) dz & \forall y \in (0, L_y) \end{cases} \quad (3.40a)$$

$$\quad (3.40b)$$

En mettant en œuvre un algorithme de Schwarz avec des conditions de type Robin à chaque itération k :

$$\frac{\partial u_2^{k+1}}{\partial x}(0, y) + \lambda u_2^{k+1}(0, y) = \frac{\partial \bar{u}_3^k}{\partial x}(0, y) + \lambda \bar{u}_3^k(0, y) \quad \forall y \in (0, L_y) \quad (3.41)$$

et

$$-\frac{\partial u_3^{k+1}}{\partial x}(0, y, z) + \lambda u_3^{k+1}(0, y, z) = -\frac{\partial u_2^{k+1}}{\partial x}(0, y) + \lambda u_2^{k+1}(0, y) \quad \forall (y, z) \in (0, L_y) \times (0, H) \quad (3.42)$$

on a le résultat suivant :

Proposition 3.4. *Pour tout $\lambda > 0$, si $u_3^0 \in H^1(\Omega_3)$, alors l'algorithme de Schwarz défini par (u_2^k, u_3^k) solutions de (3.38) et (3.39) et muni des conditions aux limites (3.41) et (3.42) converge dans $H^1(\Omega_2) \times H^1(\Omega_3)$ vers $(u_2^\lambda, u_3^\lambda)$ vérifiant les contraintes physiques de couplage (3.40a) et (3.40b).*

Démonstration :

La convergence de l'algorithme de couplage avec les conditions (3.41) et (3.42) se montre en remarquant que pour toute fonction u on a :

$$\begin{aligned} 2\lambda u &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda u\right) + \left(-\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda u\right) \\ &= \mathcal{B}_-(u) + \mathcal{B}_+(u) \end{aligned} \quad (3.43)$$

et

$$2\frac{\partial u}{\partial x} = \mathcal{B}_-(u) - \mathcal{B}_+(u) \quad (3.44)$$

On définit pour tout $k \geq 0$ $e_3^{k+1} = u_3^{k+1} - u_3^k$ et $e_2^{k+1} = u_2^{k+1} - u_2^k$. En utilisant les conditions de Robin sur les interfaces Γ et γ et les relations (3.43) et (3.44), on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_3} |\nabla e_3^{k+1}|^2 dx dy dz + \int_{\Gamma_B^3} \kappa |e_3^{k+1}|^2 dx dy &= \frac{H}{4\lambda} \int_{\gamma} \mathcal{B}_+^2(e_2^{k+1})(0, y) dy \\ &\quad - \frac{1}{4\lambda} \int_{\Gamma} \mathcal{B}_-^2(e_3^{k+1})(0, y, z) dy dz \end{aligned} \quad (3.45)$$

et

$$\int_{\Omega_2} |\nabla e_2^{k+1}|^2 dx dy + \frac{\kappa}{H} \int_{\Omega_2} |e_2^{k+1}|^2 dx = \frac{1}{4\lambda} \int_{\gamma} \left(\mathcal{B}_-^2(\bar{e}_3^k) - \mathcal{B}_+^2(e_2^{k+1}) \right) (0, y) dy \quad (3.46)$$

En multipliant (3.46) par H et en l'additionnant à (3.45), on a :

$$\int_{\Omega_3} |\nabla e_3^{k+1}|^2 dx dy dz + \int_{\Gamma_B^3} \kappa |e_3^{k+1}|^2 dx dy + H \int_{\Omega_2} |\nabla e_2^{k+1}|^2 dx dy + \kappa \int_{\Omega_2} |e_2^{k+1}|^2 dx dy \quad (3.47)$$

$$= \frac{H}{4\lambda} \int_{\gamma} \mathcal{B}_-^2(\bar{e}_3^k)(0, y) dy - \frac{1}{4\lambda} \int_{\Gamma} \mathcal{B}_-^2(e_3^{k+1})(0, y, z) dy dz \quad (3.48)$$

Ensuite, on a :

$$H^2 \int_{\gamma} \mathcal{B}_-^2(\bar{e}_3^k)(0, y) dy = \int_{\gamma} \left(\int_0^H \mathcal{B}_-(e_3^k) dz \right)^2 (0, y) dy$$

Grâce à l'inégalité de Cauchy Schwarz, on obtient :

$$\int_{\gamma} \mathcal{B}_-^2(\bar{e}_3^k)(0, y) dy \leq \frac{1}{H} \int_{\Gamma} \mathcal{B}_-^2(e_3^k)(0, y, z) dy dz$$

La relation (3.47) implique donc que :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_3} |\nabla e_3^{k+1}|^2 dx dy dz + \int_{\Gamma_B^3} \kappa |e_3^{k+1}|^2 dx dy + H \int_{\Omega_2} |\nabla e_2^{k+1}|^2 dx dy + \kappa \int_{\Omega_2} |e_2^{k+1}|^2 dx dy \\ \leq \frac{1}{4\lambda} \int_{\Gamma} \left(\mathcal{B}_-^2(e_3^k) - \mathcal{B}_-^2(e_3^{k+1}) \right) (0, y, z) dy dz \end{aligned}$$

En sommant k entre 0 et N pour $N \geq 1$, on en déduit que :

$$\sum_{k=0}^N \int_{\Omega_3} |\nabla e_3^{k+1}|^2 dx dy dz \leq \frac{1}{4\lambda} \int_{\Gamma} \mathcal{B}_-^2(e_3^0)(0, y, z) dy dz$$

et

$$H \sum_{k=0}^N \int_{\Omega_2} |\nabla e_2^{k+1}|^2 dx dy \leq \frac{1}{4\lambda} \int_{\Gamma} \mathcal{B}_-^2(e_3^0)(0, y, z) dy dz$$

Cela signifie que les séries $\sum_{k \geq 0} \int_{\Omega_3} |\nabla e_3^{k+1}|^2 dx dy dz$ et $\sum_{k \geq 0} \int_{\Omega_2} |\nabla e_2^{k+1}|^2 dx dy$ convergent.

Enfin, on rappelle que pour tous $k \geq 0$ et $n \geq 0$ on a :

$$\nabla(u_3^{k+n} - u_3^k) = \sum_{p=k+1}^{k+n} \nabla e_3^p$$

et

$$\nabla(u_2^{k+n} - u_2^k) = \sum_{p=k+1}^{k+n} \nabla e_2^p$$

Ceci est suffisant pour montrer que les suites $(\nabla u_3^k)_{k \geq 0}$ et $(\nabla u_2^k)_{k \geq 0}$ sont des suites de Cauchy respectivement dans $L^2(\Omega_3)$ et $L^2(\Omega_2)$. On en déduit grâce à l'inégalité de Poincaré la convergence des suites $(u_3^k)_{k \geq 0}$ et $(u_2^k)_{k \geq 0}$ dans respectivement $H^1(\Omega_3)$ et $H^1(\Omega_2)$.

On obtient ainsi la convergence de l'algorithme de couplage dans le cas 2-D/3-D pour des domaines quelconques. Cependant, dans le cas de domaines semi-infinis en utilisant la transformée de Fourier, on peut comme on va le voir dans la prochaine section, avec moins de difficultés trouver une majoration du taux de convergence. Ceci permet de l'optimiser.

3.2.4 Sur l'optimisation du taux de convergence

Afin d'optimiser la convergence de cet algorithme de couplage dans le cas 2-D/3-D, on va exploiter, comme dans le cas 1-D/2-D, et comme on l'a indiqué dans le chapitre 1, l'opérateur absorbant exact 2-D et/ou l'opérateur absorbant exact 3-D. Ce dernier étant compliqué à calculer et à approcher, on va donc se concentrer sur le calcul et l'approximation de l'opérateur 2-D. Le cas de la décomposition de domaine pour les modèles 2-D de type :

$$(\alpha - \Delta)(u) = f \quad \text{dans} \quad \Omega = \mathbb{R}^2, \alpha > 0 \quad (3.49)$$

où u décroît à l'infini a été étudié dans [13].

Pour résoudre ce problème, on divise le domaine Ω en deux sous-domaines : $\Omega_1 = \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}$ et $\Omega_2 = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ et on propose l'algorithme de décomposition de domaine suivant :

$$\begin{cases} (\alpha - \Delta)u_1^{k+1} &= f_1 \quad \text{dans} \quad \Omega_1 \\ (\frac{\partial}{\partial x} + \mathcal{S}_1)u_1^{k+1}(0, \cdot) &= (\frac{\partial}{\partial x} + \mathcal{S}_1)u_2^k(0, \cdot) \end{cases}$$

puis

$$\begin{cases} (\alpha - \Delta)u_2^{k+1} &= f_2 \quad \text{dans} \quad \Omega_2 \\ (\frac{\partial}{\partial x} + \mathcal{S}_2)u_2^{k+1}(0, \cdot) &= (\frac{\partial}{\partial x} + \mathcal{S}_2)u_1^{k+1}(0, \cdot) \end{cases}$$

où \mathcal{S}_i , $i = 1, 2$ désigne l'opérateur *Dirichlet-to-Neumann* associé à l'équation (3.49) dans Ω_i .

Si on désigne par $\sigma_i(k)$ le symbole de \mathcal{S}_i pour $i = 1, 2$ dans l'espace de Fourier, il a été établi dans [13] que le taux de convergence de l'algorithme (le rapport entre deux itérations successives) est donné par

$$\rho = \rho(\eta, \alpha, \sigma_1, \sigma_2) = \left| \frac{\sigma_1(\eta) - \sqrt{\eta^2 + \alpha}}{\sigma_1(\eta) + \sqrt{\eta^2 + \alpha}} \cdot \frac{\sigma_2(\eta) - \sqrt{\eta^2 + \alpha}}{\sigma_2(\eta) + \sqrt{\eta^2 + \alpha}} \right|$$

Pour une convergence optimale de l'algorithme (convergence en deux itérations), il est alors judicieux de choisir σ_1 et σ_2 de la façon suivante :

$$\sigma_1(\eta) = \sqrt{\eta^2 + \alpha^2} \quad \text{et} \quad \sigma_2(\eta) = -\sqrt{\eta^2 + \alpha^2}$$

En revanche, la transformée de Fourier inverse de ces deux symboles conduit à des opérateurs non locaux en espace.

Il a été alors proposé dans [13] d'approcher σ_1 et σ_2 par des polynômes de degré 2 de la forme :

$$\sigma_1(\eta) = p_1 + q_1\eta^2 \quad \text{et} \quad \sigma_2(\eta) = p_1 + q_1\eta^2$$

Dans ce cas, les opérateurs \mathcal{S}_i pour $i = 1, 2$ font intervenir les dérivées en y . Les paramètres p_1 , q_1 , p_2 et q_2 sont choisis de façon à minimiser la quantité :

$$\rho = \rho(\eta, \alpha, p_1, q_1, p_2, q_2) = \left| \frac{p_1 + q_1\eta^2 - \sqrt{\eta^2 + \alpha}}{p_1 + q_1\eta^2 + \sqrt{\eta^2 + \alpha}} \cdot \frac{p_2 + q_2\eta^2 - \sqrt{\eta^2 + \alpha}}{p_2 + q_2\eta^2 + \sqrt{\eta^2 + \alpha}} \right|$$

Il faut noter que les termes d'ordre 1 disparaissent grâce à des arguments de parité des opérateurs. Dans le cadre du couplage des modèles (3.28) et (3.29), le calcul du symbole de l'opérateur absorbant 3-D est plus compliqué que celui du modèle 2-D et nécessite le calcul de la transformée

de Fourier en y et en z , ce qui aboutit à un symbole $\sigma_3(\eta, w)$ dépendant des deux paramètres de Fourier η et w . Mais comme on l'a déjà indiqué, l'utilisation de l'opérateur absorbant 2-D suffit pour assurer la convergence optimisée de l'algorithme de couplage entre les modèles (3.28) et (3.29).

A l'itération k , on peut donc proposer les conditions aux limites sur les interfaces γ et Γ suivantes :

$$\frac{\partial u_2^{k+1}}{\partial x}(0, y) + \mathcal{S}_2 u_2^{k+1}(0, y) = \frac{\partial \bar{u}_3^k}{\partial x}(0, y) + \mathcal{S}_2 \bar{u}_3^k(0, y) \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad (3.50)$$

et

$$-\frac{\partial u_3^{k+1}}{\partial x}(0, y, z) + \mathcal{S}_2 u_3^{k+1}(0, y, z) = -\frac{\partial u_2^{k+1}}{\partial x}(0, y) + \mathcal{S}_2 u_2^{k+1}(0, y) \quad \forall (y, z) \in \mathbb{R} \times (0, H) \quad (3.51)$$

où \mathcal{S}_2 désigne l'opérateur *Dirichlet-to-Neumann* du modèle 2-D. Son symbole dans l'espace de Fourier est donné par :

$$\sigma_2 = \sqrt{\eta^2 + \frac{\kappa}{H}}$$

On peut alors approcher cet opérateur à l'ordre 0 par p et à l'ordre 2 comme dans [13] par $p + q^2\eta$.

Dans le cas où $p > 0$ et $q > 0$, on peut montrer que le taux de convergence défini par :

$$\rho = \left| \frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k} \right|$$

où α_k est défini par (3.35), vérifie :

$$\rho \leq \left| \frac{p + q\eta^2 - \sqrt{\eta^2 + \frac{\kappa}{H}}}{p + q\eta^2 + \sqrt{\eta^2 + \frac{\kappa}{H}}} \right|$$

Il suffit alors de chercher p et q strictement positifs qui minimisent la quantité :

$$\max_{\eta} \left| \frac{p + q\eta^2 - \sqrt{\eta^2 + \frac{\kappa}{H}}}{p + q\eta^2 + \sqrt{\eta^2 + \frac{\kappa}{H}}} \right|$$

D'un point de vue pratique et avec un modèle numérique, η balaie l'ensemble des fréquences « visibles » sur la grille de calcul, à savoir $\left[\frac{\pi}{L_y}, \frac{\pi}{\Delta_y} \right]$ où L_y désigne la taille du domaine de calcul selon la direction y et Δ_y le pas de maille dans cette direction (voir [13]).

En résumé

Pour résoudre le cas académique du couplage 1-D/2-D, on a mis en œuvre dans ce chapitre un algorithme de Schwarz avec des conditions de type Robin. On a montré que cet algorithme de couplage multi-dimensionnel converge pour tout paramètre de Robin strictement positif. En particulier, on a obtenu une convergence optimale en deux itérations quand $\lambda = \lambda_{opt}$ pour lequel l'opérateur de Robin est égal à l'opérateur absorbant exact 1-D. Ensuite, grâce à l'analyse asymptotique, on a pu contrôler l'erreur entre la partie 2-D de la solution couplée et la restriction de la solution globale de référence sur le domaine 2-D et mettre en évidence l'importance du choix de la position de l'interface de couplage. Ces résultats ont été étendus au cas 2-D/3-D. Dans le chapitre suivant, on va tester numériquement ces différents résultats.

Chapitre 4

Résultats numériques

On s'intéresse dans ce chapitre à la mise en œuvre numérique de la méthode de couplage des modèles (3.1) et (3.2) étudiée dans le chapitre 3. Dans la première partie de ce chapitre, on commence par présenter les deux cas tests que l'on va étudier. Ensuite, on s'intéresse à la convergence de l'algorithme de Schwarz 3.1 dans les deux cas. Puis on va illustrer les résultats théoriques concernant la comparaison de la partie 2-D de la solution couplée avec la restriction de la solution de référence sur Ω_2 . Ceci permettra de mettre en évidence l'influence du choix de la position de l'interface du couplage sur l'erreur commise. On verra notamment que les résultats numériques sont en cohérence avec le choix « intuitif » de l'interface de couplage qui consiste à mettre cette interface dans une zone où les effets 2-D sont négligeables. Enfin on finira par mettre en œuvre un algorithme permettant d'améliorer le choix de la position de l'interface de couplage.

Tous les calculs numériques de cette section ont été effectués avec le logiciel Freefem++ [20] en utilisant une discrétisation en éléments finis P_2 .

4.1 Description des cas tests

Comme on l'a indiqué dans le chapitre 2, on considère le modèle (3.1) que l'on va remplacer localement par le modèle (2.11). On suppose que les effets 2-D sont non négligeables à partir de $x \geq L_2$, et on considère les deux situations suivantes :

- Un domaine rectangulaire (voir figure 4.1(a)) avec un rapport d'aspect $\varepsilon = \frac{H}{L}$ très petit mais avec un terme de forçage dans la partie droite du domaine induisant des effets 2-D non négligeables. Dans ce cas, la définition de L_2 est seulement basée sur le support du terme de forçage.
- Un domaine en forme d'entonnoir (voir figure 4.1(b)) contenant une partie fine. Dans ce cas on soupçonne les effets 2-D d'être non-négligeables dans la partie large du domaine. La définition de L_2 dépend dans ce cas de la géométrie du domaine.

Dans les deux cas, on choisit $L_0 < L_2$ et on résout le système couplé suivant en utilisant l'algorithme de couplage 3.1 avec des conditions sur les interfaces de type Robin :

$$\text{Modèle 1-D : } \begin{cases} -\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\kappa}{H} u_1 = F_1 & \text{dans } (0, L_0) \\ u_1(0) = \bar{\gamma}_1 \end{cases} \quad (4.1)$$

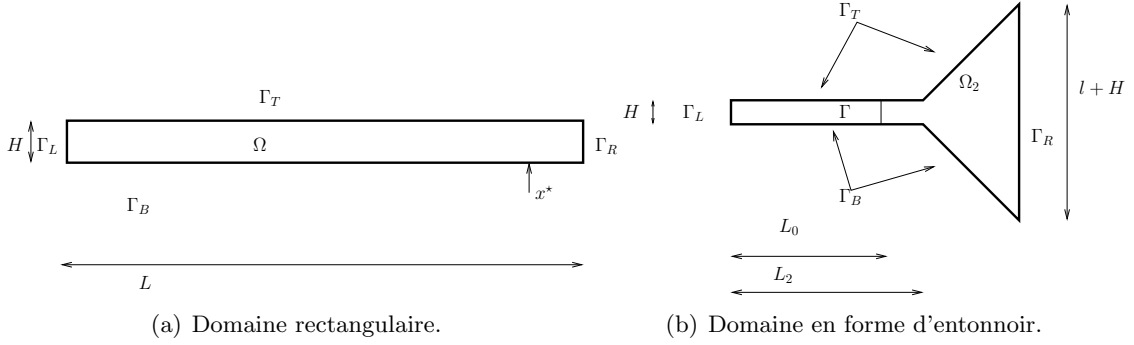


FIGURE 4.1 – Domaines d'étude pour les deux cas tests.

et

$$\text{Modèle 2-D : } \begin{cases} -\Delta u_2 = F_2 & \text{dans } \Omega_2 \\ \frac{\partial u_2}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma_T^2 = \Gamma_T \cap \partial\Omega_2 \\ \frac{\partial u_2}{\partial n} + \kappa u_2 = 0 & \text{sur } \Gamma_B^2 = \Gamma_B \cap \partial\Omega_2 \\ u_2 = \gamma_2 & \text{sur } \Gamma_R \end{cases} \quad (4.2)$$

où $F_1 = \bar{F}|_{\Omega_1}$ et $F_2 = F|_{\Omega_2}$. Les contraintes physiques sont :

$$\begin{cases} u_1(L_0) = \frac{1}{H} \int_0^H u_2(L_0, z) dz & (4.3a) \\ \frac{\partial u_1}{\partial x}(L_0) = \frac{1}{H} \int_0^H \frac{\partial u_2}{\partial x}(L_0, z) dz & (4.3b) \end{cases}$$

et sont implémentées lors du couplage par l'algorithme de Schwarz au travers des conditions de Robin :

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1^{k+1}}{\partial x}(L_0) + \lambda u_1^{k+1}(L_0) = \frac{\partial \bar{u}_2^k}{\partial x}(L_0) + \lambda \bar{u}_2^k(L_0) & \text{sur } \Gamma & (4.4a) \\ -\frac{\partial u_2^{k+1}}{\partial x}(L_0, z) + \lambda u_2^{k+1}(L_0, z) = -\frac{\partial u_1^{k+1}}{\partial x}(L_0) + \lambda u_1^{k+1}(L_0) & \text{sur } \Gamma & (4.4b) \end{cases}$$

4.1.1 Cas test #1

Le premier cas test consiste à considérer la solution du modèle 2-D (4.2) dans un domaine rectangulaire $\Omega = [0, H] \times [0, L]$ supposé peu profond : $H \ll L$. On considère un terme de forçage de la forme :

$$F(x, z) = m \exp[-(x - x^*)^2] \sin \frac{2\pi z}{H} \quad \text{où } x^* < L$$

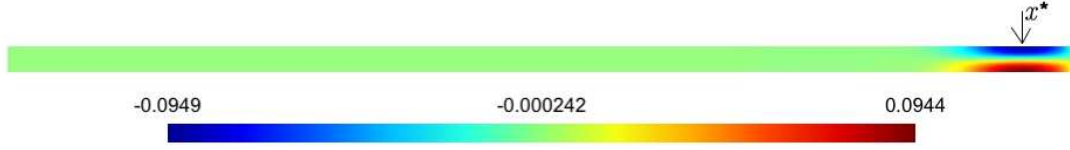
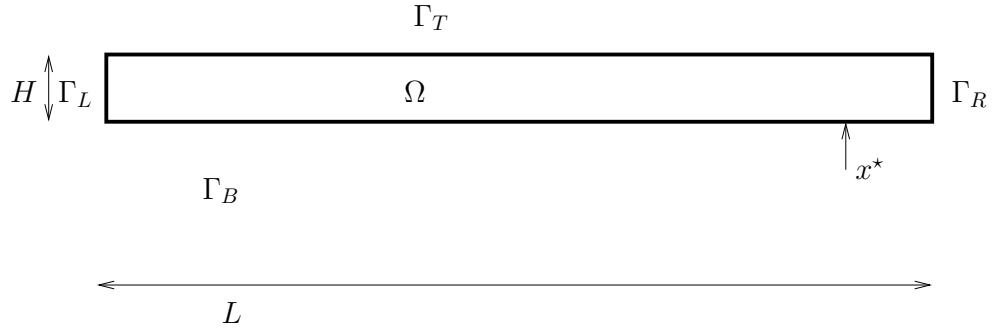


FIGURE 4.2 – Solution globale 2-D de référence pour $L = 20$, $x^* = 19$, $H = 0.5$ et $\kappa = 0.001$.

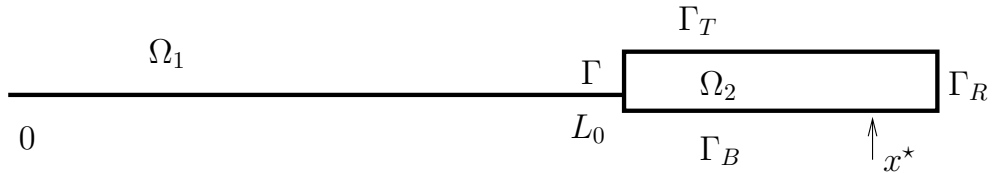
Un exemple de la solution globale de référence est représentée sur la figure 4.2.

On note ici que les effets 2-D sont principalement dus à la forme particulière du terme de forçage et sont donc localisés autour de x^* .

L'interface de couplage est positionnée en $x = L_0 < x^*$ (voir figure 4.3). On suppose a priori que dans la partie $\Omega_1 = (0, L_0) \times (0, H)$ les effets 2-D sont négligeables et donc on remplace le modèle 2-D par le modèle 1-D.



(a) Domaine global 2-D.



(b) Domaines du couplage 1D/2D

FIGURE 4.3 – Cas test #1

4.1.2 Cas test #2

Le second cas test consiste à considérer un domaine en forme d'entonnoir. Le second membre est une fonction constante égale à 1 et les effets 2-D sont principalement dus à la géométrie du domaine.

Un exemple de la solution globale de référence est représentée dans la figure 4.4

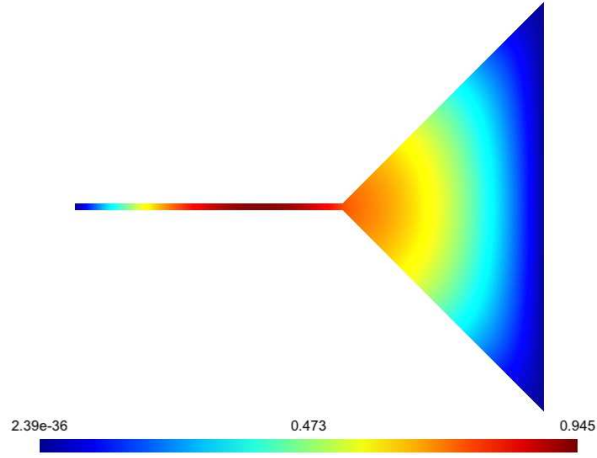
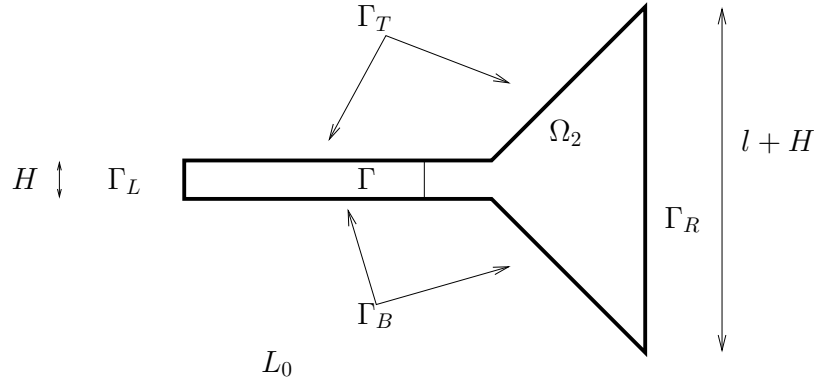
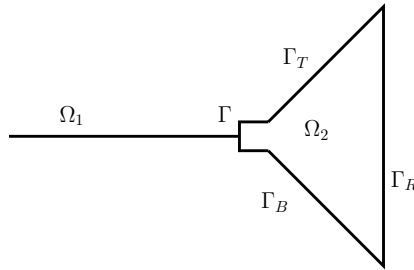


FIGURE 4.4 – Solution globale 2-D de référence pour $L = 2$, $H = 0.05$, $l = 3$ et $\kappa = 0.001$

Le modèle couplé sera ensuite résolu en coupant le domaine global en deux parties. L'interface est positionnée dans ce cas en $x = L_0$, $0 < L_0 < L_2$ (voir figure 4.5).



(a) Domaine global 2-D.



(b) Domaines du couplage 1D/2D

FIGURE 4.5 – Cas test #2 : domaine en forme d'entonnoir

4.2 Convergence de l'algorithme de Schwarz

Dans cette section, on va illustrer numériquement les résultats théoriques concernant la convergence de l'algorithme de Schwarz donnés dans le chapitre 3. En particulier, on mettra en évidence la convergence optimale de l'algorithme pour la valeur $\lambda = \lambda_{opt}$. Sur les figures 4.6 et 4.7, on représente la norme L^∞ et la norme L^2 de la différence entre deux itérations successives en fonction du nombre d'itérations et pour différentes positions de l'interface pour les deux cas tests.

On constate alors les différents points suivants :

- Comme démontré dans le chapitre 3, la convergence est obtenue en deux itérations pour la valeur λ_{opt} .
- Le fait que l'algorithme converge est indépendant de la position de l'interface. Cela signifie que si l'on place l'interface dans la zone 1-D ou dans la zone 2-D, la convergence est toujours assurée.
- La vitesse de convergence dépend par contre de la position de l'interface. À λ fixé la vitesse est d'autant plus rapide que L_0 est grand, ce qui est cohérent avec la majoration (3.16).
- Ce qui change selon le positionnement de l'interface dans la zone 1-D ou dans la zone 2-D, est la « qualité » de la solution couplée obtenue à convergence. On va dans le paragraphe suivant comparer la partie 2-D de la solution couplée avec la solution de référence pour estimer cette « qualité ».

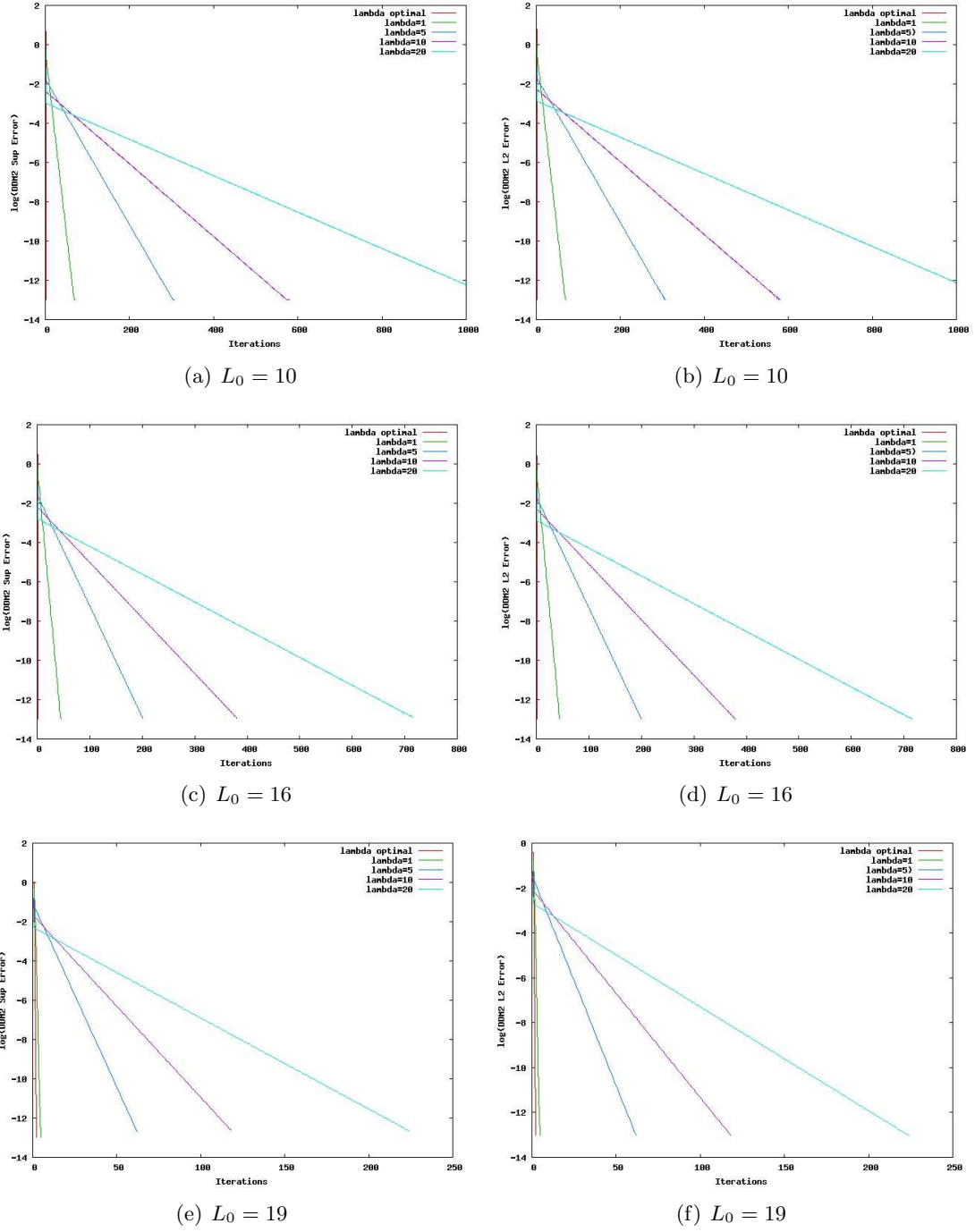
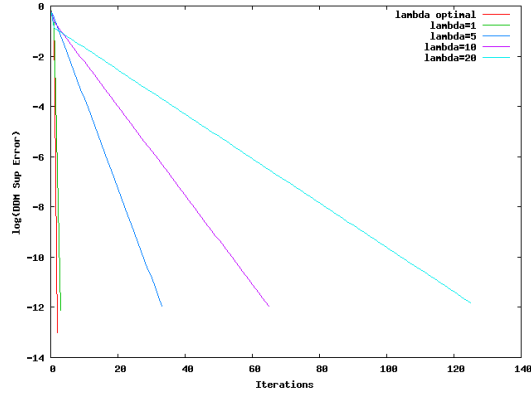
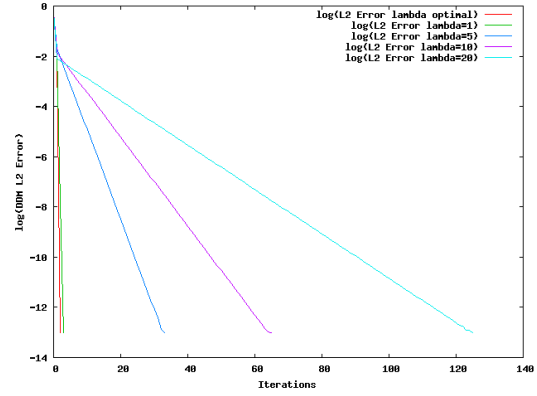


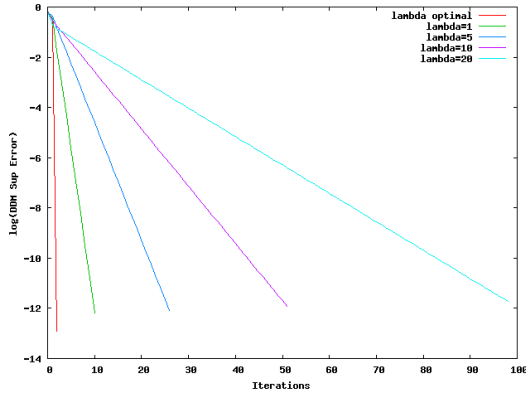
FIGURE 4.6 – Convergence de l’algorithme de Schwarz pour le cas test $\sharp 1$, pour $L = 20$, $H = 0.5$, $\kappa = 0.001$, $\lambda = \lambda^{opt}, 1, 5, 10, 20$ (du plus rapide au plus lent) et pour différentes valeurs de L_0 . À gauche : $\log_{10}(\|u_2^{k+1} - u_2^k\|_\infty)$. À droite : $\log_{10}(\|u_2^{k+1} - u_2^k\|_2)$.



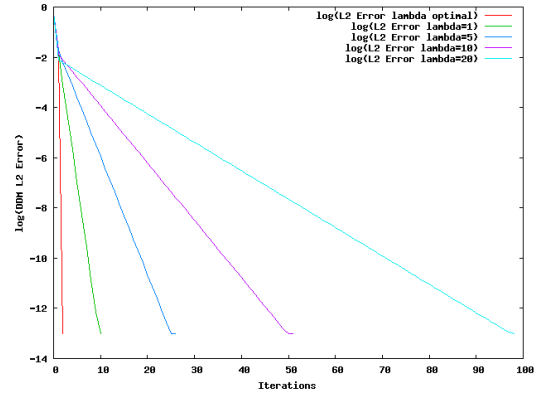
(a) $L_0 = 1$



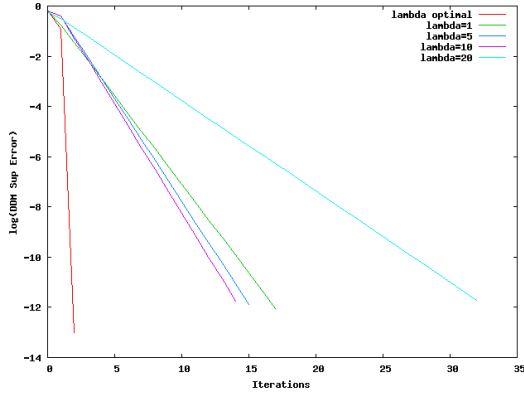
(b) $L_0 = 1$



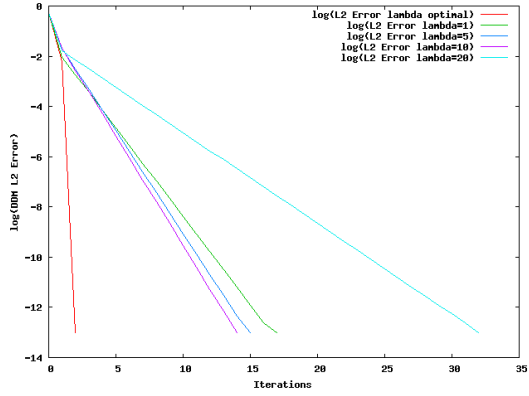
(c) $L_0 = 1.5$



(d) $L_0 = 1.5$



(e) $L_0 = 2.5$



(f) $L_0 = 2.5$

FIGURE 4.7 – Convergence de l'algorithme de Schwarz pour le cas test # 2, pour $L_2 = 2$, $H = 0.01$, $\kappa = 0.001$, $l = 3$, $\lambda = \lambda^{opt}, 1, 5, 10, 20$ (du plus rapide au plus lent) et pour différentes valeurs de L_0 . À gauche : $\log_{10}(\|u_2^{k+1} - u_2^k\|_\infty)$. À droite : $\log_{10}(\|u_2^{k+1} - u_2^k\|_2)$.

4.3 Comparaison de la solution couplée avec la solution de référence

Pour tester la fiabilité de l'algorithme de couplage proposé dans le chapitre 3, on va dans cette section comparer numériquement la solution obtenue par couplage avec la solution de référence globale dans les deux cas tests décrits ci-dessus. Cette comparaison sera effectuée selon la position de l'interface en $x = L_0$ et selon le rapport d'aspect $\varepsilon = \frac{H}{L}$.

À la différence des cas classiques de décomposition de domaine, la solution couplée à convergence n'est pas égale à la restriction de la solution globale sur le domaine considéré, ceci étant dû à la réduction du modèle 2-D.

Sur les figures 4.8 et 4.9, on représente l'erreur en norme H^1 entre la solution couplée et la solution de référence en fonction de ε . La position de l'interface est dans ce cas fixée. On a choisi ici trois valeurs différentes de L_0 et on a testé pour deux valeurs de κ , une petite et une relativement grande. On a indiqué aussi en rouge sur ces figures la pente théorique correspondant au terme de droite dans l'inégalité $\|u_{|\Omega_2} - u_2\|_{H^1(\Omega_2)}^2 \leq M(\lambda, u)(1 + \delta^2)\varepsilon^2$ de la proposition 3.2 du chapitre 3.

- Pour la plus petite valeur de κ , les résultats suivent assez bien la pente théorique (voir figures 4.8(a), 4.9(a), 4.9(c) et 4.9(e)). L'erreur augmente logiquement avec L_0 et ne suit plus la pente théorique car on est entré dans la zone 2-D (voir figures 4.8(c) et 4.8(e)).
- En revanche pour la plus grande valeur de κ la courbe d'erreur ne suit plus la pente théorique. Ceci est cohérent avec le fait qu'on avait supposé $\tilde{\kappa}$ petit dans le chapitre 2 pour établir que les effets 2-D sont négligeables (voir figures 4.8(b), 4.8(d), 4.9(b), 4.9(d) et 4.9(f)).

Sur les figures 4.10 et 4.11, on représente la norme H^1 de la différence entre la solution couplée et la solution de référence comme fonction de la position de l'interface pour les deux cas tests. Dans ce cas, le rapport d'aspect ε est fixe.

- Dans presque tous les cas, les résultats numériques suivent bien la pente théorique (sauf pour la figure 4.10(f) où κ et ε sont grands).
- On observe en particulier un changement brusque de la pente de la courbe de façon cohérente avec celui de la courbe de la pente théorique. En effet, à partir d'une certaine valeur de L_0 , l'erreur croît rapidement (théoriquement $\delta \rightarrow \infty$ dans l'estimation de la proposition 3.2). Ceci peut donc donner une indication sur la valeur inconnue L_1 de la position optimale de l'interface. Dans la prochaine section, on va mettre en œuvre un algorithme simple pour l'estimation de cette valeur L_1 , position optimale de l'interface.

Enfin sur les figures (4.12(a)) et (4.12(b)), on représente l'erreur en norme H^1 en fonction de λ pour L_0 et ε fixés. On remarque que pour les deux cas tests l'erreur en norme L^2 varie peu en fonction de λ . En revanche, l'erreur en norme H^1 varie d'une façon significative avec λ . Cela signifie que pour les grandes valeurs de λ , on pénalise le raccord de la moyenne verticale du flux.

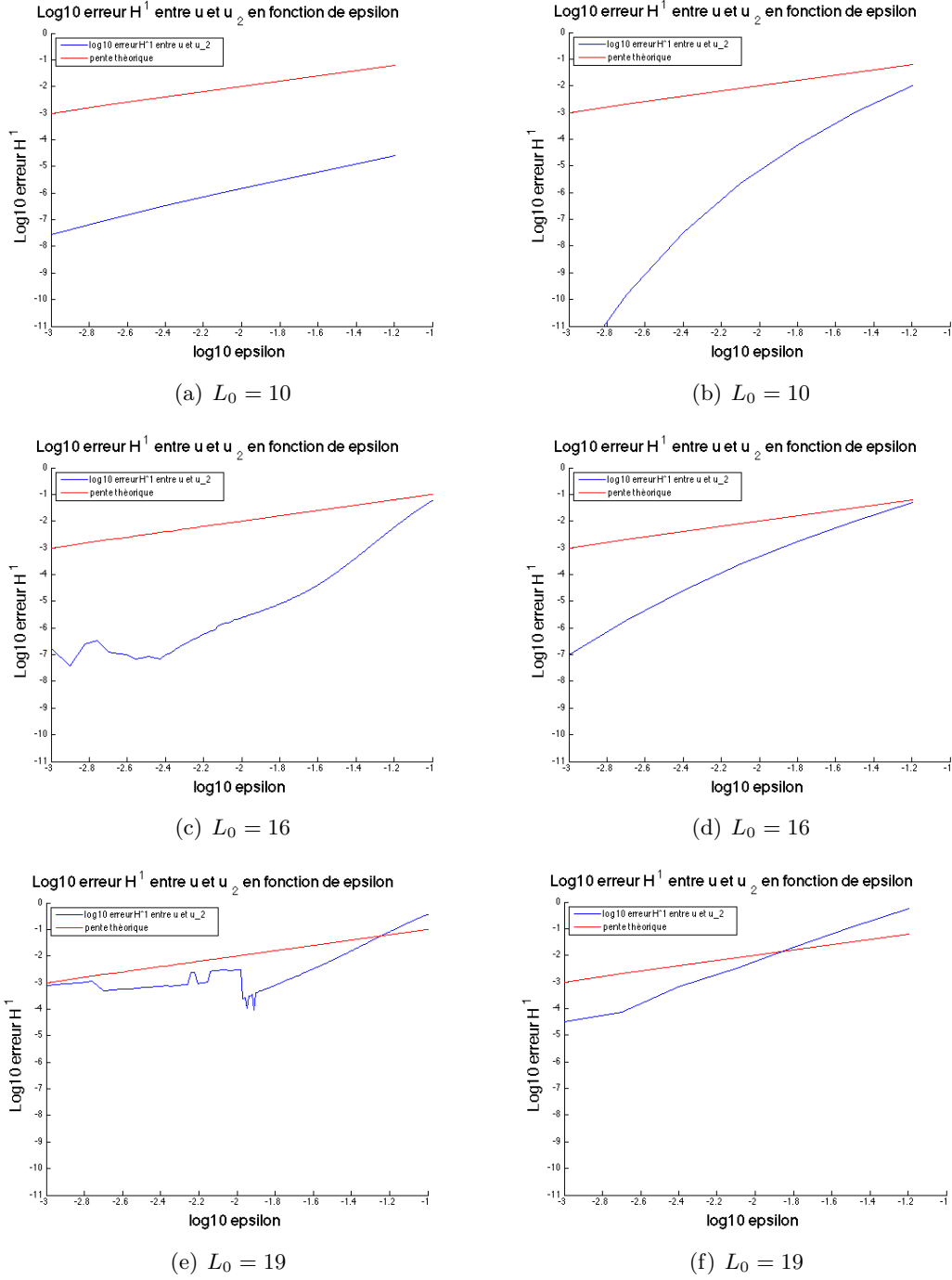
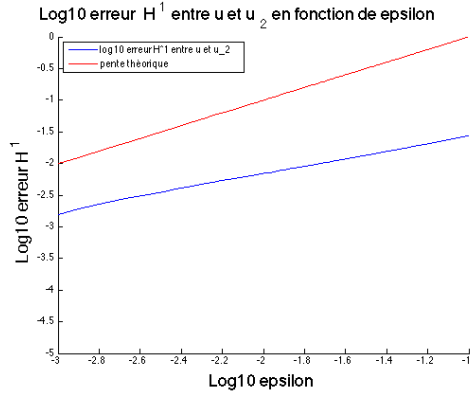
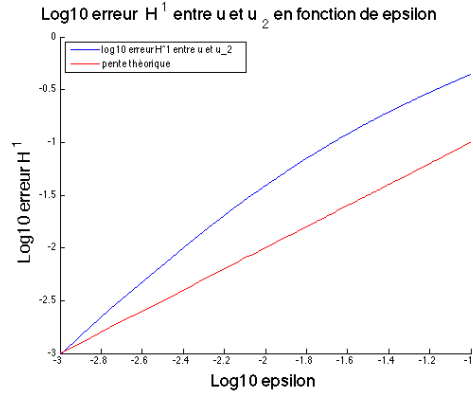


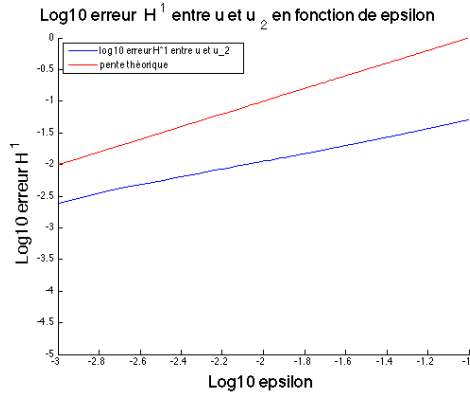
FIGURE 4.8 – Erreur en norme H^1 entre la solution couplée u_2 et la solution de référence u dans le domaine Ω_2 en fonction de ϵ en échelle logarithmique pour le cas test #1, pour $L = 20$ et différentes valeurs de L_0 . À gauche : $\kappa = 0.0001$ À droite : $\kappa = 0.1$. En rouge la pente théorique.



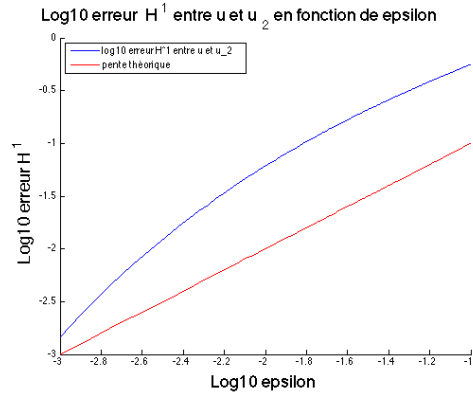
(a) $L_0 = 1$



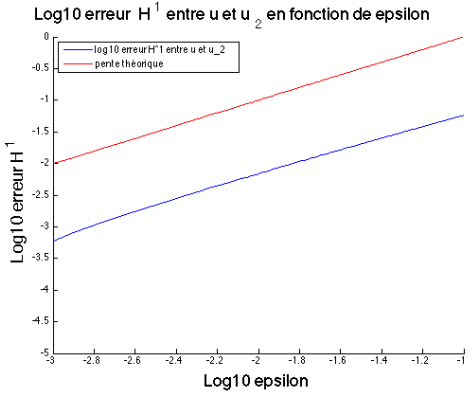
(b) $L_0 = 1$



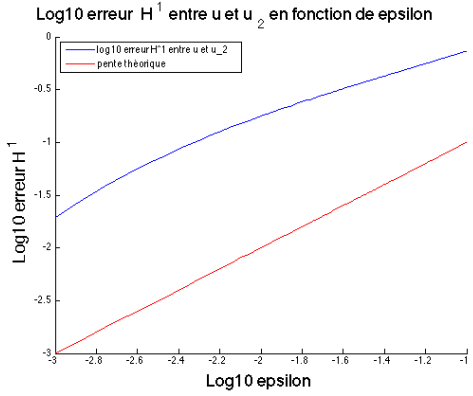
(c) $L_0 = 1.5$



(d) $L_0 = 1.5$

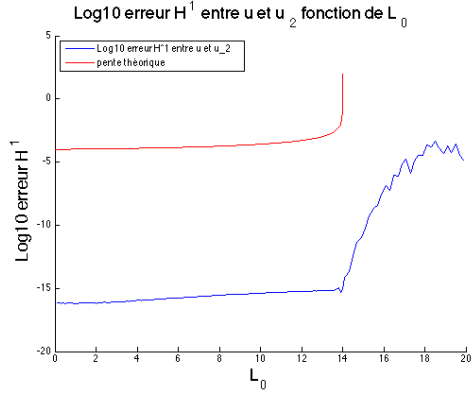


(e) $L_0 = 2$

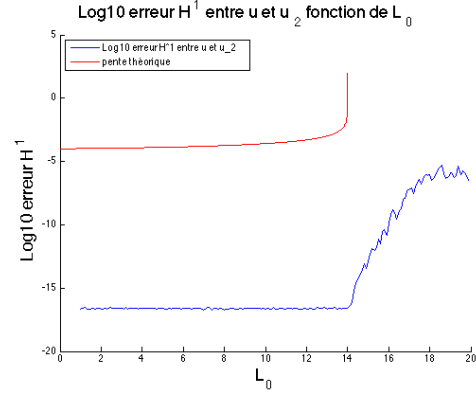


(f) $L_0 = 2$

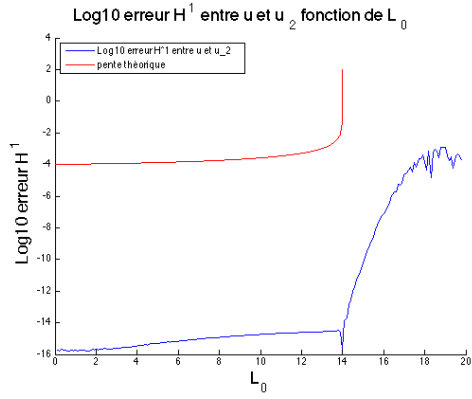
FIGURE 4.9 – Idem figure 4.8 pour le cas test #2 et $L_2 = 2$.



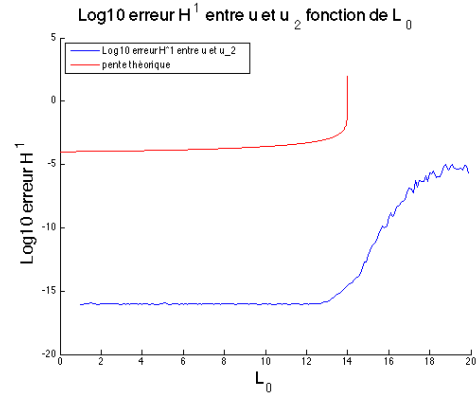
(a) $h = 0.005$



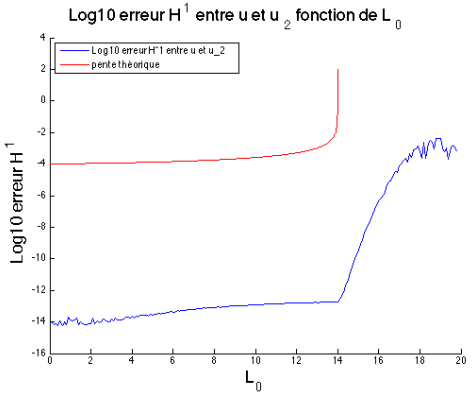
(b) $h = 0.005$



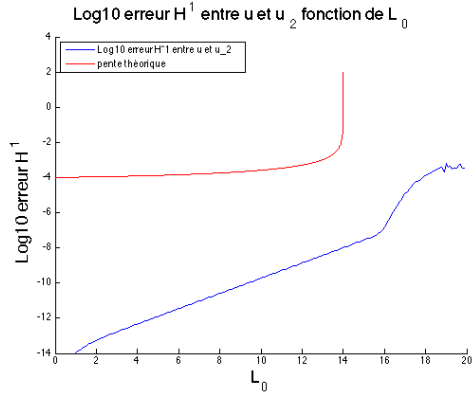
(c) $h = 0.01$



(d) $h = 0.01$

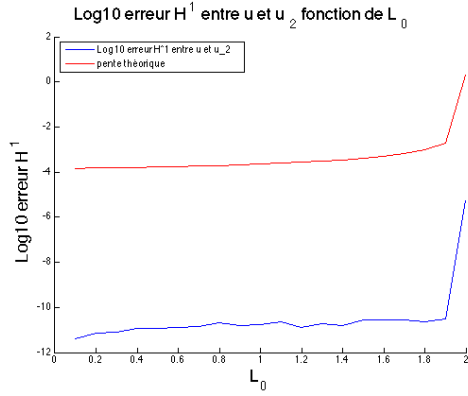


(e) $h = 0.1$

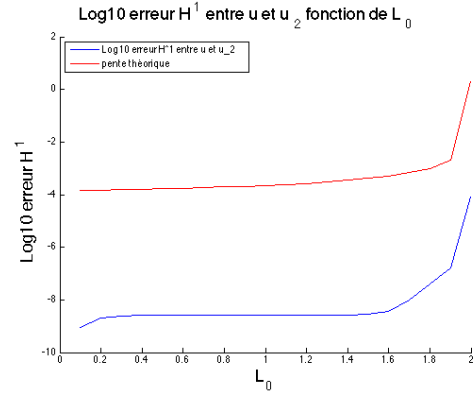


(f) $h = 0.1$

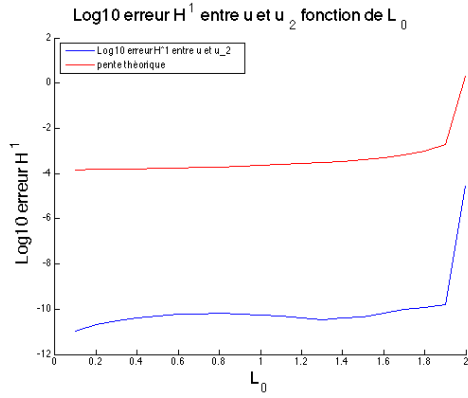
FIGURE 4.10 – Logarithme de l'erreur en norme H^1 entre la solution couplée u_2 et la solution de référence u dans le domaine Ω_2 en fonction de L_0 pour le cas test #1, pour $L = 20$ et différentes valeurs de h . À gauche : $\kappa = 0.001$. À droite : $\kappa = 0.1$.



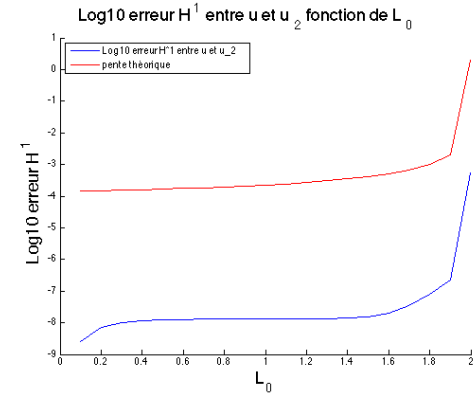
(a) $h = 0.0005$



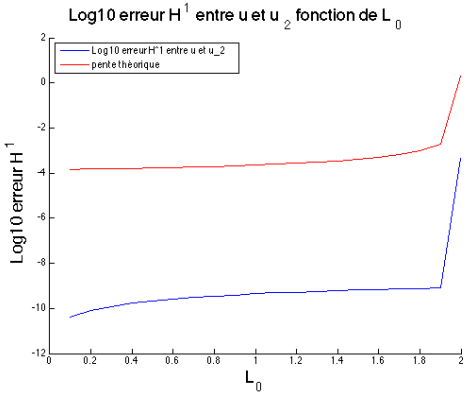
(b) $h = 0.0005$



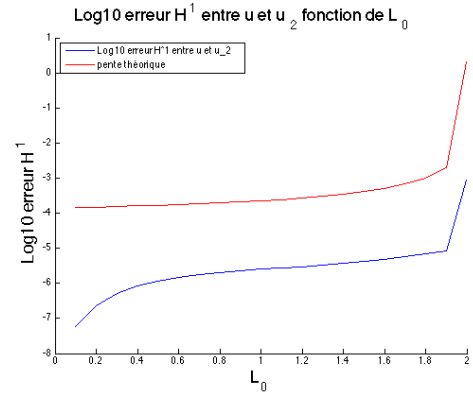
(c) $h = 0.001$



(d) $h = 0.001$



(e) $h = 0.01$



(f) $h = 0.01$

FIGURE 4.11 – Idem figure 4.10 pour le cas test #2 et pour $L_2 = 2$.

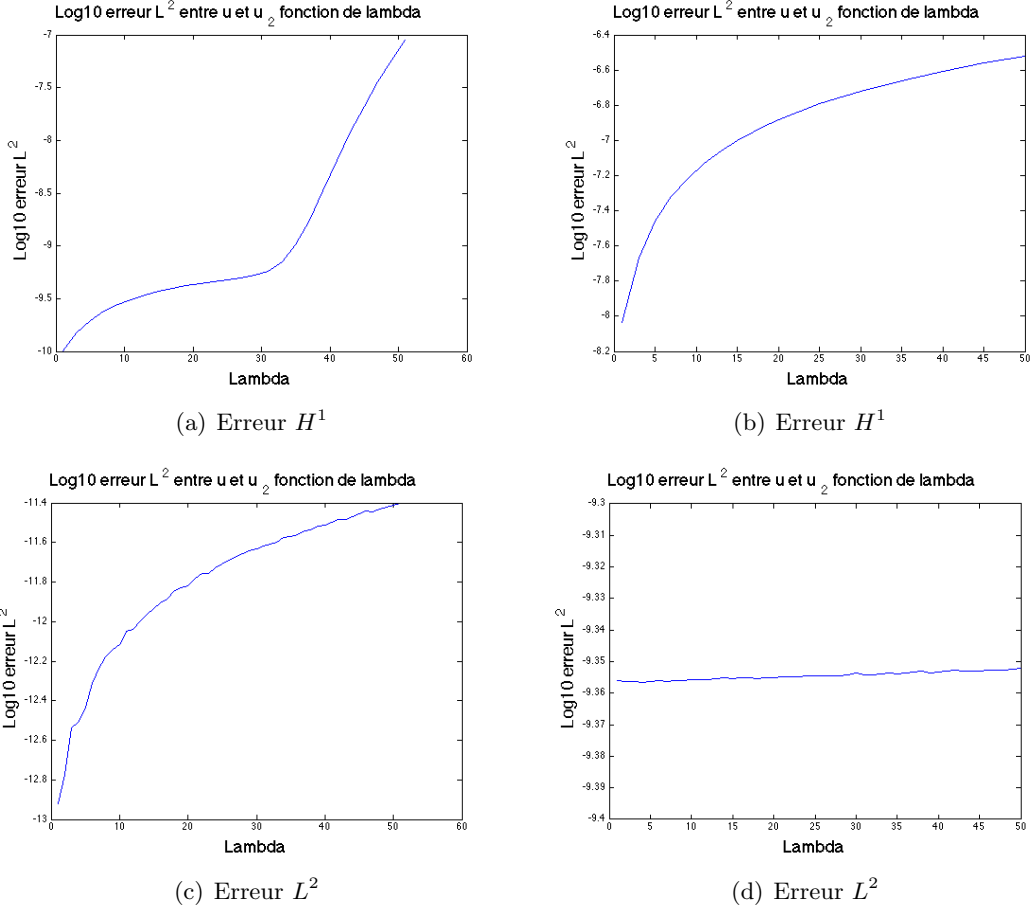


FIGURE 4.12 – Logarithme de l’erreur entre la solution couplée u_2 et la solution de référence u dans le domaine Ω_2 en fonction de λ pour les deux cas tests. À gauche : cas test #1 pour $L = 20$, $\kappa = 0.001$, $L_0 = 14$ et $h = 0.01$. À droite : cas test #2 pour $L_2 = 2$, $\kappa = 0.001$, $l = 3$, $L_0 = 1$ et $h = 0.001$.

4.4 Choix de la position de l’interface de couplage Γ

Jusqu’à présent, la position de l’interface est fixée d’une façon empirique sans garantie qu’on soit dans la zone 1-D. Pour déterminer une position proche de la position optimale $x = L_1$ (voir chapitre 2 pour la définition de L_1), on va proposer un algorithme. Pour cela, on suppose que l’on connaît une valeur initiale L_1^0 telle que pour $x \leq L_1^0$ les effets 2-D sont négligeables et L_2 telle que pour $x \geq L_2$ les effets 2-D sont importants. On peut alors mettre en œuvre l’algorithme suivant :

Pour ΔL_1^0 et ε' donnés très petits :

Initialisation : L_1^0 donné.

Tant que $\|u_2 - \bar{u}_2\|_2 \leq \varepsilon'$ **faire**

exécuter l'algorithme de Schwarz :

Initialisation : u_2^0 donné.

 À l'étape k ($k \geq 0$), résoudre :

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{1D}(u_2^{k+1}) = F_1 & \text{dans } \Omega_1^0 = (0, L_1^0) \\ B_1(u_1^{k+1})(L_1^0) = B_1(\mathcal{R}u_2^k)(L_1^0) \end{cases}$$

 puis résoudre

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{2D}(u_2^{k+1}) = F_2 & \text{dans } \Omega_2^0 = (L_1^0, L) \times (0, h) \\ B_2(u_2^{k+1})(L_1^0, z) = B_2(\mathcal{E}u_1^{k+1})(L_1^0, z) & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

Fin

$$L_1^0 = L_1^0 + \Delta L_1^0$$

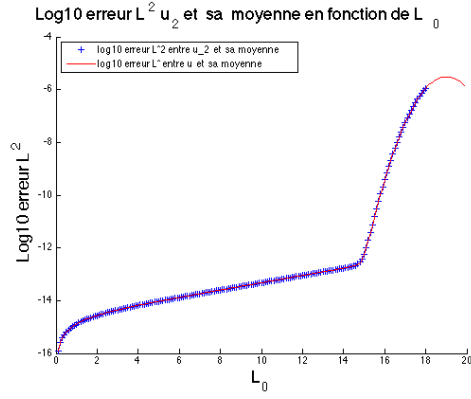
Fin

Algorithme 4.1: Algorithme de recherche de la position idéale de l'interface de couplage Γ

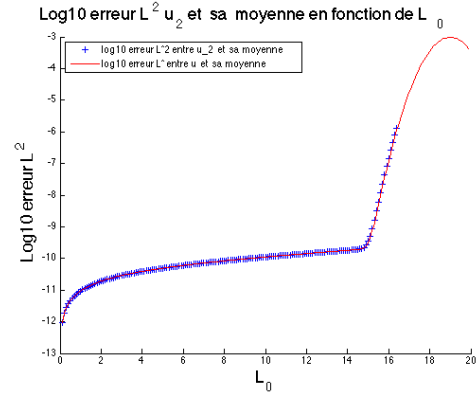
L'opérateur \mathcal{L}_{1D} désigne l'ensemble des équations (3.1) et l'opérateur \mathcal{L}_{2D} l'ensemble des équations (3.2).

Remarques :

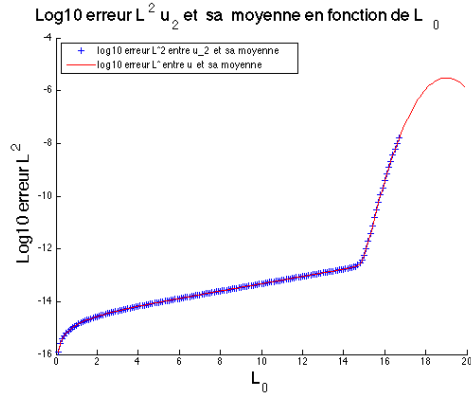
- Sur les figures 4.13 et 4.14, on a représenté $\|u_2 - \bar{u}_2\|_{2,\Gamma}$ en fonction de la position courante L_1^0 de l'interface pour chaque pas de l'algorithme défini ci-dessus. On a comparé ce résultat à $\|u - \bar{u}\|_{2,\Gamma}$ en fonction de L_0 pour $L_0 \in [0, L_2]$ (en rouge sur les figures 4.13 et 4.14). On remarque que les résultats obtenus sont très bons dans le sens où on suit bien la courbe théorique et que l'écart entre les deux courbes est minime.
- le choix de ε' est crucial pour la recherche d'une position de l'interface Γ proche de la position idéale située en $x = L_1$. Trop petit, l'algorithme risque de converger rapidement sans atteindre une valeur approximative de L_1 . Trop grand, on risque de passer dans la région où les effets 2-D sont non négligeables. Pour certaines valeurs de ε' (voir figures 4.13(a), 4.13(c), 4.13(b) et 4.13(d)), la courbe de l'erreur $\|u_2 - \bar{u}_2\|_2$ en fonction de L_0 présente un changement brusque de pente, comme c'est le cas pour $\|u - \bar{u}\|_2$ en fonction de L_0 . Pour des valeurs de ε' très petites, l'algorithme peut s'arrêter avant d'atteindre ce seuil à partir duquel on a rupture de pente (voir figures 4.13(f), 4.14(e) et 4.14(f)). On a donc intérêt à choisir ε' de façon à observer ce changement de pente et de façon à ce que l'algorithme s'arrête juste après le changement de pente de l'erreur.
- Cet algorithme de recherche n'a d'intérêt pratique que s'il est peu coûteux en temps de calcul par rapport au coût de la simulation du modèle global de référence. Il faut donc avoir une position initiale L_1^0 très proche de la valeur optimale L_1 .



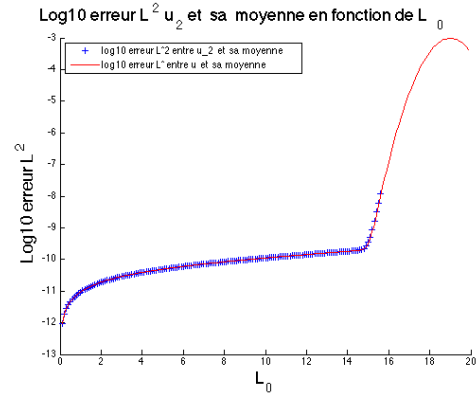
(a) $\varepsilon' = 10^{-6}$



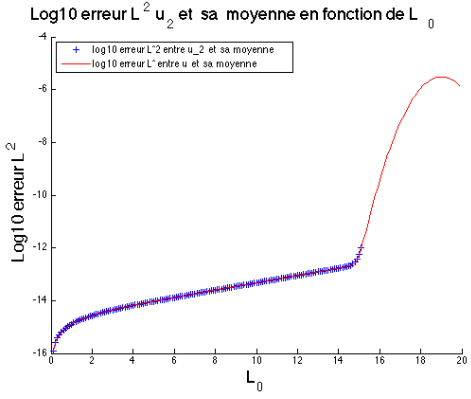
(b) $\varepsilon' = 10^{-6}$



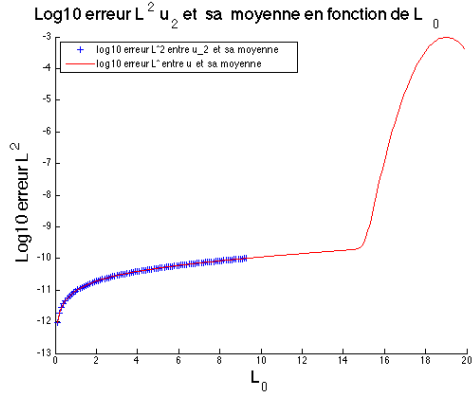
(c) $\varepsilon' = 10^{-8}$



(d) $\varepsilon' = 10^{-8}$

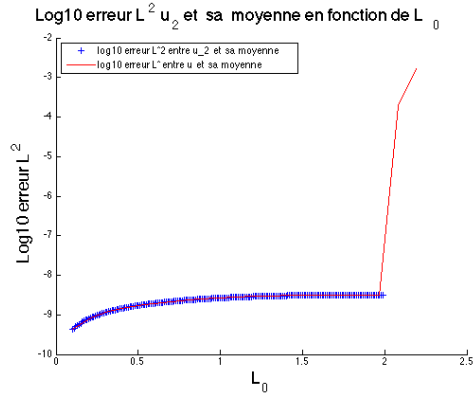


(e) $\varepsilon' = 10^{-12}$

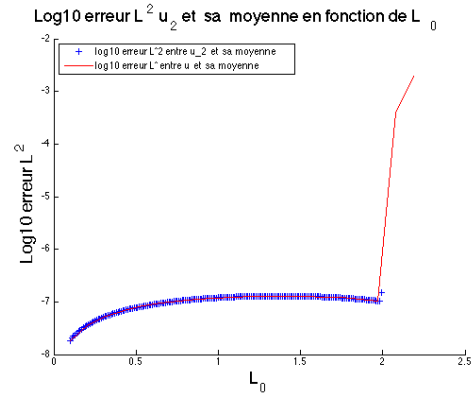


(f) $\varepsilon' = 10^{-10}$

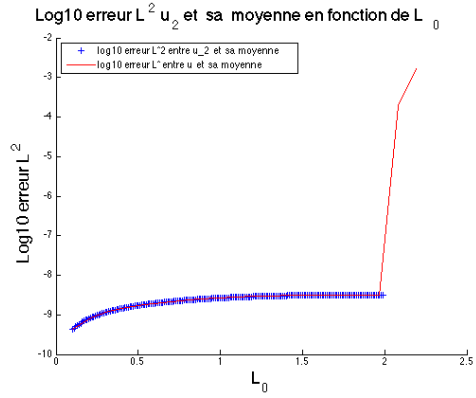
FIGURE 4.13 – Erreur en norme L^2 entre la solution couplée u_2 et sa moyenne verticale (en bleu) sur Γ en fonction de L_0 pour le cas test #1 et pour $\kappa = 0.001$. En rouge : idem pour la solution de référence 2-D. À gauche : erreur pour $h = 0.01$. À droite : erreur pour $h = 0.1$.



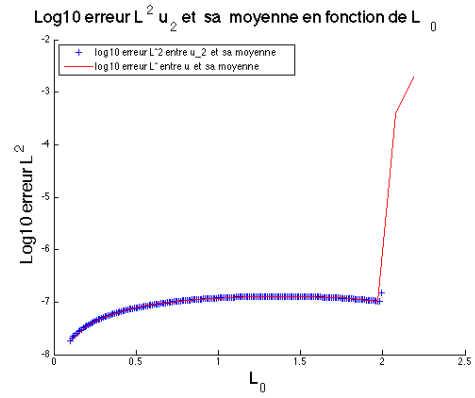
(a) $\varepsilon' = 10^{-6}$



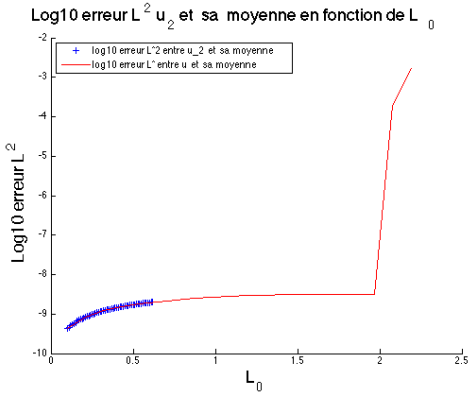
(b) $\varepsilon' = 10^{-4}$



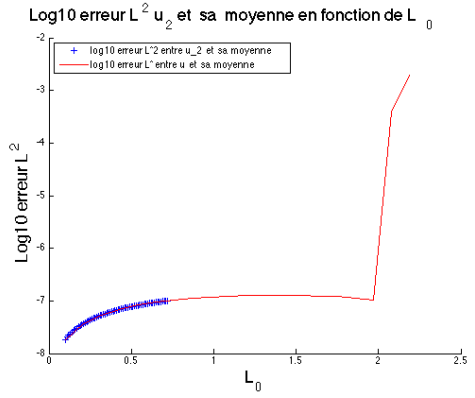
(c) $\varepsilon' = 10^{-8}$



(d) $\varepsilon' = 10^{-6}$



(e) $\varepsilon' = 2 * 10^{-9}$



(f) $\varepsilon' = 10^{-7}$

FIGURE 4.14 – Erreur en norme L^2 entre la solution couplée u_2 et sa moyenne verticale (en bleu) sur Γ en fonction de L_0 pour le cas test #2 et pour $\kappa = 0.001$. En rouge : idem pour la solution de référence 2-D. À gauche : erreur pour $h = 0.001$. À droite : erreur pour $h = 0.01$.

Conclusion

Dans ce chapitre, on a illustré numériquement les différents résultats théoriques du chapitre 3. Plus précisément, on a montré numériquement la convergence de l'algorithme de couplage 3.1 pour tout $\lambda > 0$ et plus particulièrement la convergence optimale pour $\lambda = \lambda^{opt}$. Ensuite, on a étudié numériquement l'erreur en norme H^1 entre la solution couplée et la solution globale sur le domaine Ω . Les résultats obtenus sont ainsi en adéquation avec la majoration de la proposition 3.2 du chapitre 3. Enfin, on a mis en œuvre un algorithme permettant d'améliorer la recherche de la position optimale de l'interface de couplage.

Dans la deuxième partie de cette thèse, on généralisera certains de ces résultats dans le cadre du couplage des équations de Navier-Stokes hydrostatiques linéaires 3D et du système de Saint-Venant linéaire 2D avec viscosité. On verra plus particulièrement que la convergence optimale de l'algorithme de couplage est plus délicate à obtenir que dans le cas idéalisé qu'on vient de traiter. Ceci est dû au fait que les opérateurs absorbants dans ce cas sont non locaux en temps et en espace.

Deuxième partie

Application au couplage des systèmes linéaires de Saint-Venant 2-D et de Navier-Stokes hydrostatiques 3-D

Chapitre 5

Définition des modèles à coupler

Dans ce chapitre, on va rappeler brièvement comment obtenir les équations de Navier-Stokes hydrostatiques 3-D à partir des équations de Navier-Stokes 3-D. Les équations de Navier-Stokes hydrostatiques ont l'avantage d'être plus simples à étudier que le système de Navier-Stokes, et leur utilisation est justifiée dans le cas où on a une pression hydrostatique. Ensuite, on présentera de la même façon comment dériver le système de Saint-Venant 2-D à partir des équations de Navier-Stokes hydrostatiques dans le cas non-linéaire et dans le cas linéaire. En effet, afin de mettre en œuvre dans la suite des algorithmes efficaces de type Schwarz et d'utiliser les techniques usuelles de calcul des opérateurs absorbants, on est amené à travailler avec des modèles linéaires.

5.1 Équations de Navier-Stokes

Le mouvement d'un fluide dans un domaine de \mathbb{R}^3 que l'on notera Ω_t (voir figure 5.1) est régi par les équations de Navier-Stokes. Ce système est composé de l'équation de conservation de la masse et de l'équation de conservation de la quantité de mouvement.

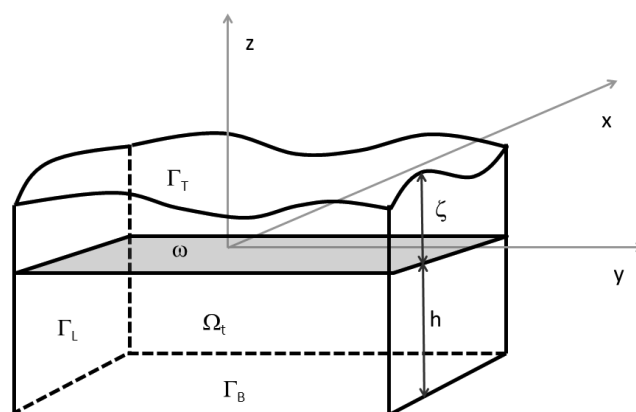


FIGURE 5.1 – Exemple de domaine Ω_t

5.1.1 Équation de conservation de la masse

On désigne par $\rho(X, t)$ la densité d'un fluide à un instant donné t et en une position X de l'espace. On appelle masse du fluide contenue dans Ω_t la quantité $m(t) = \int_{\Omega_t} \rho(X, t) dX$. Cette masse étant constante au cours du temps, cela se traduit par :

$$\frac{Dm(t)}{Dt} = 0$$

où $\frac{D}{Dt}$ désigne la dérivée particulaire (voir par exemple [5] pour la définition). Ceci implique :

$$\frac{D}{Dt} \left(\int_{\Omega_t} \rho(X, t) dX \right) = 0$$

En utilisant le théorème de transport (voir [5, chapitre 1]), on obtient :

$$\int_{\Omega_t} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{U}) \right) dX = 0$$

où \mathbf{U} désigne la vitesse du fluide. Ceci étant vrai pour tout t et pour tout domaine Ω_t , on en déduit l'équation de la conservation de la masse, appelée aussi *équation de continuité* :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{U}) = 0 \quad (5.1)$$

5.1.2 Équation de conservation de la quantité de mouvement

On suppose que le fluide de densité ρ se déplace à la vitesse \mathbf{U} . La quantité de mouvement contenue dans un volume Ω_t est donnée par :

$$\int_{\Omega_t} \rho \mathbf{U} dX$$

Selon le théorème fondamental de la dynamique, la variation de la quantité de mouvement d'un fluide est égale à la somme des forces extérieures exercées sur ce fluide. On distingue deux types de forces extérieures :

– Les forces volumiques :

$$\int_{\Omega_t} \rho f dX$$

où f désigne la densité volumique de force comme l'accélération de pesanteur, la force de Coriolis, etc.

– Les forces de surface :

$$\int_{\partial \Omega_t} \tau(s) ds$$

où τ désigne les contraintes surfaciques.

L'équation de conservation de la quantité de mouvement s'écrit alors :

$$\frac{D}{Dt} \left(\int_{\Omega_t} \rho \mathbf{U} dX \right) = \int_{\Omega_t} \rho f dX + \int_{\partial \Omega_t} \tau(s) ds$$

et en utilisant le théorème de transport, on obtient :

$$\int_{\Omega_t} \left(\frac{\partial \rho \mathbf{U}}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{U} \otimes \mathbf{U}) \right) dX = \int_{\Omega_t} \rho f dX + \int_{\partial \Omega_t} \tau(s) ds$$

où \otimes désigne le produit tensoriel (voir par exemple [5] pour la définition).

Ensuite, d'après le théorème de Cauchy (voir [5, chapitre 1]) le tenseur de contraintes τ s'écrit sous la forme $\tau = \sigma \cdot n$, où n est la normale sortante à Ω_t .

L'équation de conservation de la quantité de mouvement se réécrit :

$$\int_{\Omega_t} \left(\frac{\partial \rho \mathbf{U}}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{U} \otimes \mathbf{U}) \right) dX = \int_{\Omega_t} \rho f dX + \int_{\Omega_t} \operatorname{div}(\sigma) dX$$

On en déduit que :

$$\frac{\partial \rho \mathbf{U}}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{U} \otimes \mathbf{U}) = \rho f + \operatorname{div}(\sigma)$$

On suppose dans la suite que le fluide est newtonien. Dans ce cas, le tenseur σ s'écrit :

$$\sigma = 2\mu D(\mathbf{U}) + (\lambda \operatorname{div}(\mathbf{U}) - p) Id$$

où p désigne la pression, $D(\mathbf{U}) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{U} + \nabla \mathbf{U}^T)$ désigne le tenseur des vitesses de déformation

et μ et λ deux constantes. Le coefficient μ est appelé viscosité dynamique et $k = \frac{2}{3}\mu + \lambda$ est appelé viscosité en volume. Comme indiqué dans [5, chapitre 1], la viscosité en volume est souvent très faible. Dans ce cas, le tenseur des contraintes s'écrit :

$$\sigma = 2\mu D(\mathbf{U}) - (p + \frac{2}{3}\mu \operatorname{div}(\mathbf{U})) Id$$

Le système formé par l'équation de continuité et l'équation de conservation de la quantité de mouvement est complété en général par l'équation de la conservation de l'énergie totale. Toutefois, on va s'intéresser dans la suite au cas d'un fluide incompressible, ce qui rend cette équation de conservation de l'énergie inutile.

5.1.3 Fluide incompressible

La densité d'un fluide dépend de la température et de la pression. On dit qu'un écoulement est incompressible si $\frac{\partial \rho}{\partial p} = 0$. Si on considère un écoulement homogène en espace, isotherme et incompressible, on a alors une densité constante. L'équation de continuité devient donc :

$$\operatorname{div}(\mathbf{U}) = 0$$

et le tenseur des contraintes s'écrit :

$$\sigma = 2\mu D(\mathbf{U}) - p Id$$

D'où la forme « classique » des équations de Navier-Stokes :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\mathbf{U}) = 0 \\ \partial_t \mathbf{U} + \operatorname{div} \mathbf{U} \otimes \mathbf{U} = \operatorname{div}(\sigma) + f \end{cases}$$

Si on note $\mathbf{U} = (U, V, W)$, les équations de Navier-Stokes en coordonnées cartésiennes s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t U + U \partial_x U + V \partial_y U + W \partial_z U - \mu \Delta U + \partial_x p = f_1 \\ \partial_t V + U \partial_x V + V \partial_y V + W \partial_z V - \mu \Delta V + \partial_y p = f_2 \\ \partial_t W + U \partial_x W + V \partial_y W + W \partial_z W - \mu \Delta W + \partial_z p = f_3 \\ \partial_x U + \partial_y V + \partial_z W = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (5.2a) \\ (5.2b) \\ (5.2c) \\ (5.2d) \end{array}$$

Remarque : on a divisé ici les équations d'origine par ρ . Le terme μ désigne maintenant, par abus de notation, la viscosité cinématique qui est égale à la viscosité dynamique divisée par la densité ρ .

5.2 Équations de Navier-Stokes hydrostatiques

La difficultés de l'analyse mathématique des équations de Navier-Stokes, ainsi que les calculs coûteux qu'elles engendrent, ont amené les physiciens à développer des modèles plus simples. Les équations de Navier-Stokes hydrostatiques, ou équations primitives dans le langage océanographique, constituent dans le cadre des modèles d'océans à grande échelle une bonne alternative aux équations de Navier-Stokes d'un point de vue numérique.

On va rappeler brièvement dans le paragraphe suivant comment dériver les équations de Navier-Stokes hydrostatiques à partir des équations de Navier-Stokes.

5.2.1 Dérivation des équations de Navier-Stokes hydrostatiques

On considère le système de Navier-Stokes (5.2) et on suppose que le domaine Ω_t est peu profond. Cela signifie que la hauteur caractéristique H_c est très petite devant la longueur caractéristique L_c . On considère par la suite que les forces extérieures f_1 et f_2 sont nulles et que $f_3 = -g$.

Dans la suite, on va mettre le système (5.2) sous forme adimensionnelle. On définit pour cela le petit paramètre $\varepsilon = \frac{H_c}{L_c}$ (appelé rapport d'aspect). On introduit ensuite les variables et les paramètres sans dimension suivants :

$$(x, y) = L_c(\tilde{x}, \tilde{y}), \quad z = H_c \tilde{z}, \quad t = \frac{L_c}{U_c} \tilde{t}, \quad \mathbf{U}_h = U_c \tilde{\mathbf{U}}_h, \quad W = \varepsilon U_c \tilde{W}, \quad p = U_c^2 \tilde{p}, \quad \zeta = H_c \tilde{\zeta}$$

et

$$\nu = \frac{1}{Re} = \frac{\mu}{L_c U_c}, \quad Fr = \frac{U_c}{\sqrt{g H_c}} \quad (5.3)$$

où U_c désigne une vitesse caractéristique, et Re et Fr désignent respectivement le nombre de Reynolds et le nombre de Froude.

Dans la suite, afin d'alléger les écritures, on omettra le signe tilde $\tilde{\cdot}$ dans les équations sans

dimension. La mise sous forme adimensionnelle du système (5.2) donne :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t U + U \partial_x U + V \partial_y U + W \partial_z U - \nu \Delta_h U - \frac{\nu}{\varepsilon^2} \partial_z^2 U + \partial_x p = 0 \\ \partial_t V + U \partial_x V + V \partial_y V + W \partial_z V - \nu \Delta_h V - \frac{\nu}{\varepsilon^2} \partial_z^2 V + \partial_y p = 0 \\ \partial_t W + U \partial_x W + V \partial_y W + W \partial_z W - \nu \Delta_h W - \frac{\nu}{\varepsilon^2} \partial_z^2 W + \frac{1}{\varepsilon^2} \partial_z p = -\frac{1}{\varepsilon^2 F r^2} \\ \partial_x U + \partial_y V + \partial_z W = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (5.4a) \\ (5.4b) \\ (5.4c) \\ (5.4d) \end{array}$$

où l'opérateur Δ_h désigne la restriction du laplacien pour les variables horizontales.

On fera aussi dans la suite l'hypothèse suivante :

$$\nu = \nu_0 \varepsilon, \quad \text{où,} \quad \nu_0 = O(1) \quad (5.5)$$

L'approximation hydrostatique consiste alors à multiplier la troisième équation (5.4c) par ε^2 et prendre ensuite $\varepsilon = 0$. Ce qui donne, en revenant aux variables dimensionnelles, le système des équations de Navier-Stokes hydrostatiques :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t U + U \partial_x U + V \partial_y U + W \partial_z U - \nu \Delta U + \partial_x p = 0 \\ \partial_t V + U \partial_x V + V \partial_y V + W \partial_z V - \mu \Delta V + \partial_y p = 0 \\ \partial_z p = -g \\ \partial_x U + \partial_y V + \partial_z W = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (5.6a) \\ (5.6b) \\ (5.6c) \\ (5.6d) \end{array}$$

On trouve une littérature abondante à propos de ces équations (voir par exemple [36] pour le cas visqueux et [40] pour le cas non visqueux ainsi que les articles cités dans ces deux articles).

Remarque : dans la littérature, afin de dériver les équations de Navier-Stokes hydrostatiques ou les équations primitives, on considère souvent deux viscosités différentes : une viscosité horizontale μ_h et une viscosité verticale μ_v très petite devant μ_h (voir par exemple [2]). On les appelle dans ce cas viscosités turbulentes. Ceci peut en effet être justifié dans le cadre de la modélisation océanique car la rotation domine et la force de Coriolis diminue le mouvement vertical.

D'un point de vue numérique, elle sont introduites pour paramétrer l'effet de dissipation de l'énergie à l'échelle de la maille. Là encore, on a besoin de considérer deux viscosités différentes avec $\mu_v \ll \mu_h$.

On suppose donc que $\mu_v = \varepsilon^2 \mu_h$. Ceci a pour conséquence de simplifier le terme en ε^2 devant $\partial_z^2 W$ dans la troisième équation (5.4c) du système (5.4). L'équation hydrostatique est donc obtenue en prenant $\varepsilon = 0$ sans avoir à faire l'hypothèse supplémentaire (5.5).

5.2.2 Forme traditionnelle des équations de Navier-Stokes hydrostatiques

On réécrit Le système des équations de Navier-Stokes hydrostatiques à surface libre sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{U}_h + \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{U}_h - \mu \Delta \mathbf{U}_h + \frac{1}{\rho} \nabla_h p = 0 \\ \operatorname{div}_h \mathbf{U}_h + \partial_z W = 0 \\ \partial_z p = -\rho g \end{cases} \quad (5.7)$$

pour $(x, y, z, t) \in \Omega_t \times \mathbb{R}^+ = \omega \times [-b(x, y), \zeta(x, y, t)] \times \mathbb{R}^+$, où $\omega \subset \mathbb{R}^2$ (voir figure 5.1) et où les inconnues sont la vitesse $\mathbf{U} = (\mathbf{U}_h, W) = (U, V, W)$ et la pression p . Le coefficient de viscosité cinématique μ est supposé constant. Les opérateurs ∇_h et div_h désignent respectivement les restrictions aux variables horizontales du gradient et de la divergence. On note par la suite $\Omega = \omega \times [-b(x, y), \zeta(x, y, t)]$ qui est donc un sous-domaine de \mathbb{R}^3 .

On considère les conditions initiales suivantes :

$$\mathbf{U}_h(., 0) = \mathbf{U}^{ini} \quad \text{dans} \quad \Omega_0 \quad \text{et} \quad \zeta(., 0) = \zeta^{ini} \quad \text{dans} \quad \omega$$

Le système (5.7) est complété par des conditions aux limites qu'on précisera dans le paragraphe suivant.

Remarque : dans le cadre de l'étude des océans, les équations (5.7) sont complétées par des équations sur les traceurs. De même la force de Coriolis est considérée. Ici, dans le cadre de la modélisation fluviale on a négligé le terme de Coriolis. En effet, le rapport entre les forces d'inertie et la force de Coriolis est très grand devant 1 (ce rapport est caractérisé par le nombre de Rossby défini comme le rapport entre la période de rotation de la terre et l'échelle de temps caractéristique de l'écoulement).

5.2.3 Conditions aux limites

Le système (5.7) est muni des conditions aux limites suivantes :

Au fond Γ_B d'équation $z = -b(x, y)$:

- Condition de non pénétration (imperméabilité) :

$$\mathbf{U}_h(x, y, -b, t) \cdot \nabla b + W(x, y, -b, t) = 0 \quad (5.8)$$

- Condition de type Navier

$$(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}_1) \boldsymbol{\tau}_1 + (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}_2) \boldsymbol{\tau}_2 = k (\mathbf{U} \cdot \boldsymbol{\tau}_1) \boldsymbol{\tau}_1 + k (\mathbf{U} \cdot \boldsymbol{\tau}_2) \boldsymbol{\tau}_2 \quad (5.9)$$

où k est le coefficient de frottement, $\boldsymbol{\sigma} = -pI + \mu (\nabla \mathbf{U} + \nabla \mathbf{U}^t)$ le tenseur des contraintes, $\boldsymbol{\tau}_1$ et $\boldsymbol{\tau}_2$ les vecteurs tangents au fond et \mathbf{n} la normale sortante au fond.

Dans le cas d'un fond plat (b est une constante), ces deux conditions se réduisent respectivement à :

- Condition d'imperméabilité : $W(x, y, -b, t) = 0$
- Condition de type Robin : $\mu \partial_n \mathbf{U}_h + k \mathbf{U}_h = 0$

À la surface libre Γ_T d'équation $z = \zeta(x, y, t)$:

- Condition cinématique

$$\partial_t \zeta + \mathbf{U}_h \cdot \nabla_h \zeta - W = 0 \quad (5.10)$$

Cette condition signifie que les particules de la surface libre restent « collées » à cette surface au cours du temps. Dans le cas d'un toit rigide, c'est à dire si ζ ne varie pas, cette condition implique $W = 0$.

- Continuité des contraintes à la surface

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = -p_a \mathbf{n} \quad (5.11)$$

où p_a est la pression atmosphérique et \mathbf{n} la normale sortante à la surface libre. On négligera par la suite les variations de p_a , ce qui nous permet de prendre par la suite $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = 0$ (la pression étant définie à une constante près).

Sur les bords latéraux :

- Condition de type Dirichlet

$$\mathbf{U}_h = \mathbf{U}^d \quad \text{sur} \quad \partial\Omega_t \setminus (\Gamma_B \cup \Gamma_T) \times \mathbb{R}^+ \quad \text{et} \quad \zeta = \zeta^d \quad \text{sur} \quad \partial\omega \times \mathbb{R}^+$$

5.2.4 Élimination du terme de pression

Le système (5.7), muni des différentes conditions aux limites indiquées ci-dessus, peut être écrit sous la forme équivalente suivante qui permet d'éliminer le terme de pression :

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{U}_h + \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{U}_h - \mu \Delta \mathbf{U}_h + g \nabla_h \zeta = 0 & \text{dans} \quad \Omega_t \times \mathbb{R}^+ \\ \operatorname{div}_h \mathbf{U}_h + \partial_z W = 0 & \text{dans} \quad \Omega_t \times \mathbb{R}^+ \\ \partial_t \zeta + \operatorname{div}_h \left(\int_{-b}^{\zeta} \mathbf{U}_h dz \right) = 0 & \text{dans} \quad \omega \times \mathbb{R}^+ \end{cases} \quad (5.12)$$

avec les conditions aux limites

$$\begin{cases} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \boldsymbol{\tau}_1 + (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \boldsymbol{\tau}_2 = k (\mathbf{U} \cdot \boldsymbol{\tau}_1) \boldsymbol{\tau}_1 + k (\mathbf{U} \cdot \boldsymbol{\tau}_2) \boldsymbol{\tau}_2 & \text{sur} \quad \Gamma_B \\ \mathbf{U}_h \cdot \nabla b + W = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_B \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_T \\ \mathbf{U}_h = \mathbf{U}^d & \text{sur} \quad \partial\Omega_t \setminus (\Gamma_B \cup \Gamma_T) \times \mathbb{R}^+ \\ \zeta = \zeta^d & \text{sur} \quad \partial\omega \times \mathbb{R}^+ \end{cases} \quad (5.13)$$

et les conditions initiales

$$\mathbf{U}(., 0) = \mathbf{U}^{ini} \quad \text{dans} \quad \Omega_0 \quad \text{et} \quad \zeta(., 0) = \zeta^{ini} \quad \text{dans} \quad \omega \quad (5.14)$$

Pour montrer que ce système d'équations (5.12) est équivalent au système (5.7), il suffit d'écrire la pression en fonction de ζ et d'utiliser l'équation de continuité et la condition cinématique à la surface libre (5.10) (voir la thèse d'A. Decoene [10]).

5.3 Dérivation des équations de Saint-Venant 2D

Dans ce qui suit on va rappeler brièvement la dérivation des équations de Saint-Venant 2D à partir des équations de Navier-Stokes hydrostatiques en se basant sur les travaux de J.-F. Gerbeau et B. Perthame [17] et de C. Lucas [28].

5.3.1 Mise sous forme adimensionnelle des équations

Pour dériver les équations de Saint-Venant, l'hypothèse principale (qu'on a déjà considérée pour dériver le système des équations de Navier-Stokes hydrostatiques) consiste à supposer que le domaine Ω_t est peu profond. Une seconde hypothèse faite dans [17] consiste à considérer une pression hydrostatique. Cette hypothèse est nécessaire dans leur cas car ils dérivent le système de Saint-Venant à partir des équations de Navier-Stokes sous sa forme générale. Dans ce chapitre, elle est déjà intégrée dans les équations de départ.

Dans la suite, on met le système (5.12) sous forme adimensionnelle de façon analogue au paragraphe 5.2.1. ce qui donne pour l'équation du moment :

$$\partial_t \mathbf{U}_h + (\mathbf{U}_h \cdot \nabla_h) \mathbf{U}_h + W \partial_z \mathbf{U}_h - \nu \Delta_h \mathbf{U}_h - \frac{\nu}{\varepsilon^2} \partial_z^2 \mathbf{U}_h + \frac{1}{Fr^2} \nabla_h \zeta = 0 \quad (5.15)$$

Cette équation s'écrit aussi grâce à l'équation de continuité :

$$\partial_t \mathbf{U}_h + \text{div}_h(\mathbf{U}_h \otimes \mathbf{U}_h) + \partial_z(\mathbf{U}_h W) - 2\nu \text{div}_h(D_h \mathbf{U}_h) - \frac{\nu}{\varepsilon^2} \partial_z^2 \mathbf{U}_h - \nu \nabla_h \partial_z W + \frac{1}{Fr^2} \nabla_h \zeta = 0 \quad (5.16)$$

où

$$D_h \mathbf{U}_h = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2\partial_x U & \partial_y U + \partial_x V \\ \partial_y U + \partial_x V & 2\partial_y V \end{pmatrix}$$

L'équation de continuité et l'équation en surface libre s'écrivent :

$$\text{div}_h \mathbf{U}_h + \partial_z W = 0 \quad (5.17)$$

et

$$\partial_t \zeta + \text{div}_h \left(\int_{-b}^{\zeta} \mathbf{U}_h dz \right) = 0 \quad (5.18)$$

Conditions aux limites

Les conditions aux limites s'écrivent (voir [28] et [30]) :

- À la surface libre : la continuité du tenseur des contraintes :

$$\begin{cases} -2\partial_x U \partial_x \zeta - (\partial_y U + \partial_x V) \partial_y \zeta + \frac{1}{\varepsilon^2} \partial_z U + \partial_x W = 0 \\ -2\partial_y V \partial_y \zeta - (\partial_y U + \partial_x V) \partial_x \zeta + \frac{1}{\varepsilon^2} \partial_z V + \partial_y W = 0 \\ -2\partial_z W + \partial_z U \partial_x \zeta + \varepsilon^2 \partial_x W \partial_x \zeta + \partial_z V \partial_y \zeta + \varepsilon^2 \partial_y W \partial_y \zeta = 0 \end{cases} \quad (5.19)$$

- Au fond :

◊ Condition d'imperméabilité :

$$\mathbf{U}_h(x, y, -b, t) \cdot \nabla b + W(x, y, -b, t) = 0$$

◊ Pour un vecteur $u = (u_1, u_2)^t$ on note $u^\perp = (-u_2, u_1)^t$. Les deux premières lignes de la condition de Navier s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} 2\varepsilon\nu \left[\left(D_h(\mathbf{U}_h) \nabla_h b \cdot \nabla_h^\perp b + \frac{1}{2} (\nabla_h W + \frac{1}{\varepsilon^2} \partial_z \mathbf{U}_h) \cdot \nabla_h^\perp b \right) (1 + |\nabla_h b|^2) \nabla_h^\perp b \right. \\ \left. + \left(D_h \mathbf{U}_h \nabla_h b \cdot \nabla_h b + \frac{1}{2} (\nabla_h W + \frac{1}{\varepsilon^2} \partial_z \mathbf{U}_h) \cdot \nabla_h b \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2} |\nabla_h b|^2 (\partial_x b (\partial_z U + \varepsilon^2 \partial_x W) + \partial_y b (\partial_z V + \varepsilon^2 \partial_y W) + 2\partial_z W) \right) \nabla_h b \right] \\ = K \mathbf{U}_h |\nabla_h b|^2 (1 + \varepsilon^2 |\nabla_h b|^2)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

où $K = \frac{k}{U_c}$. On verra plus loin que la troisième ligne n'apporte pas d'information supplémentaire.

Dans [17] et [28], afin de dériver les équations de Saint-Venant à partir des équations de Navier-Stokes, les auteurs ont remarqué qu'il faut aller à l'ordre 2 en ε pour que les termes de viscosité apparaissent. Il en sera de même ici. Dans ce qui suit, on ne gardera que les termes d'ordre inférieur ou égal à 2 en ε dans les conditions aux limites, ce qui donne :

- Continuité du tenseur des contraintes en surface :

$$\partial_z \mathbf{U}_h = \varepsilon^2 (2D_h(\mathbf{U}_h) \nabla_h \zeta - \nabla_h W) \quad (5.20)$$

- En utilisant que pour tout vecteur u on a $(u \cdot \nabla_h^\perp b) \nabla_h^\perp b + (u \cdot \nabla_h b) \nabla_h b = |\nabla_h b|^2 u$, les deux premières équations de la condition de Navier au fond s'écrivent :

$$2\varepsilon\nu D_h(\mathbf{U}_h) \nabla_h b + \varepsilon\nu \left(\nabla_h W + \frac{1}{\varepsilon^2} \partial_z \mathbf{U}_h \right) = K \mathbf{U}_h + 2\varepsilon\nu \partial_z W \nabla_h b + \varepsilon\nu (\partial_z \mathbf{U}_h \cdot \nabla_h b) \nabla_h b \quad (5.21)$$

La troisième équation, qu'on n'a pas écrite ici, redonne à l'ordre 2 en ε la condition d'imperméabilité.

5.3.2 Équation des moments intégrée

Une première étape pour obtenir le système de Saint-Venant consiste à intégrer sur la hauteur d'eau l'équation des moments, l'équation de continuité et l'équation en surface libre. L'équation en surface libre (5.18) est indépendante de z et donc elle reste inchangée en moyennant verticalement. En intégrant l'équation de continuité (5.17), on retrouve l'équation en surface libre. Enfin l'intégration de l'équation des moments (5.16) implique le résultat suivant :

Lemme 5.1. *L'équation des moments intégrée donne :*

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{-b}^{\zeta} \mathbf{U}_h dz \right) + \operatorname{div}_h \left(\int_{-b}^{\zeta} \mathbf{U}_h \otimes \mathbf{U}_h dz \right) + \frac{1}{Fr^2} H \nabla_h \zeta = 2\nu \operatorname{div}_h \left(\int_{-b}^{\zeta} D_h(\mathbf{U}_h) dz \right) \\ - \frac{K}{\varepsilon} \mathbf{U}_h|_{z=-b} - \nu (-\partial_z \mathbf{U}_h \cdot \nabla_h b + 2\partial_z W) \nabla_h b \end{aligned}$$

où $H(x, y, t) = \zeta(x, y, t) + b(x, y)$ pour $(x, y, t) \in \omega \times \mathbb{R}^+$

Démonstration

En intégrant l'équation des moments (5.16) entre $-b$ et ζ , on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{-b}^{\zeta} \partial_t \mathbf{U}_h + \int_{-b}^{\zeta} \operatorname{div}_h(\mathbf{U}_h \otimes \mathbf{U}_h) + \int_{-b}^{\zeta} \partial_z(\mathbf{U}_h W) - 2\nu \int_{-b}^{\zeta} \operatorname{div}_h(D_h \mathbf{U}_h) - \frac{\nu}{\varepsilon^2} \int_{-b}^{\zeta} \partial_z^2 \mathbf{U}_h \\ - \nu \int_{-b}^{\zeta} \nabla_h \partial_z W + \frac{1}{Fr^2} \int_{-b}^{\zeta} \nabla_h \zeta = 0 \end{aligned}$$

En utilisant les formules de Leibniz, cette relation devient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{-b}^{\zeta} \mathbf{U}_h dz \right) - \partial_t \zeta \mathbf{U}_h|_{z=\zeta} + \operatorname{div}_h \left(\int_{-b}^{\zeta} \mathbf{U}_h \otimes \mathbf{U}_h dz \right) - ((\mathbf{U}_h \cdot \nabla_h \zeta) \mathbf{U}_h)|_{z=\zeta} \\ - ((\mathbf{U}_h \cdot \nabla_h b) \mathbf{U}_h)|_{z=-b} + (W \mathbf{U}_h)|_{z=\zeta} - (W \mathbf{U}_h)|_{z=-b} + \frac{1}{Fr^2} H \nabla_h \zeta = 2\nu \operatorname{div}_h \left(\int_{-b}^{\zeta} D_h(\mathbf{U}_h) dz \right) \\ - 2\nu D_h(\mathbf{U}_h) \nabla_h \zeta - 2\nu D_h(\mathbf{U}_h) \nabla_h b + \frac{\nu}{\varepsilon^2} (\partial_z \mathbf{U}_h|_{z=\zeta} - \partial_z \mathbf{U}_h|_{z=-b}) + \nu (\nabla_h W|_{z=\zeta} - \nabla_h W|_{z=-b}) \end{aligned}$$

Les termes $\partial_t \zeta \mathbf{U}_h|_{z=\zeta} + ((\mathbf{U}_h \cdot \nabla_h \zeta) \mathbf{U}_h)|_{z=\zeta} - (W \mathbf{U}_h)|_{z=\zeta}$ et $((\mathbf{U}_h \cdot \nabla_h b) \mathbf{U}_h)|_{z=-b} + (W \mathbf{U}_h)|_{z=-b}$ sont nuls grâce aux conditions cinématiques au fond et à la surface libre (5.8) et (5.10).

La continuité du tenseur des contraintes à la surface (5.20) implique :

$$-2\nu D_h(\mathbf{U}_h) \nabla_h \zeta + \frac{\nu}{\varepsilon^2} \partial_z \mathbf{U}_h|_{z=\zeta} + \nu \nabla_h W|_{z=\zeta} = 0$$

et la condition de Navier au fond (5.21) donne :

$$-2\nu D_h(\mathbf{U}_h) \nabla_h b - \frac{\nu}{\varepsilon^2} \partial_z \mathbf{U}_h|_{z=-b} - \nu \nabla_h W|_{z=-b} = -\frac{K}{\varepsilon} \mathbf{U}_h|_{z=-b} - \nu (-\partial_z \mathbf{U}_h \cdot \nabla_h b + 2\partial_z W) \nabla_h b$$

L'équation des moments intégrée devient alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{-b}^{\zeta} \mathbf{U}_h dz \right) + \operatorname{div}_h \left(\int_{-b}^{\zeta} \mathbf{U}_h \otimes \mathbf{U}_h dz \right) + \frac{1}{Fr^2} H \nabla_h \zeta = 2\nu \operatorname{div}_h \left(\int_{-b}^{\zeta} D_h(\mathbf{U}_h) dz \right) \\ - \frac{K}{\varepsilon} \mathbf{U}_h|_{z=-b} - \nu (-\partial_z \mathbf{U}_h \cdot \nabla_h b + 2\partial_z W) \nabla_h b \end{aligned}$$

□

5.3.3 Équations de Saint-Venant à l'ordre 1

Lemme 5.2. *En variables dimensionnelles, le système de Saint-Venant à l'ordre 1 s'écrit :*

$$\begin{cases} \partial_t H + \operatorname{div}_h(H\mathbf{u}) = 0 & \text{dans } \omega \times \mathbb{R}^+ \\ \partial_t(H\mathbf{u}) + \operatorname{div}_h(H\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + gH\nabla_h\zeta = -k\mathbf{u} & \text{dans } \omega \times \mathbb{R}^+ \end{cases} \quad (5.22)$$

Démonstration

Tout d'abord on va faire, comme dans [17] et [28], les hypothèses supplémentaires suivantes :

$$\nu = \varepsilon\nu_0 \quad \text{et} \quad K = \frac{k}{U_c} = \varepsilon K_0, \quad \text{où } \nu_0 \text{ et } K_0 \text{ sont } O(1)$$

L'équation (5.15) et les conditions (5.20) et (5.21) impliquent :

$$\partial_z^2 \mathbf{U}_h = O(\varepsilon), \quad \partial_z \mathbf{U}_h|_{z=\zeta} = O(\varepsilon) \quad \text{et} \quad \partial_z \mathbf{U}_h|_{z=-b} = O(\varepsilon)$$

ce qui signifie qu'au premier ordre, on a :

$$\mathbf{U}_h(x, y, z, t) = \overline{\mathbf{U}}_h(x, y, t) + O(\varepsilon)$$

et

$$(\mathbf{U}_h \otimes \mathbf{U}_h)(x, y, z, t) = (\overline{\mathbf{U}}_h \otimes \overline{\mathbf{U}}_h)(x, y, t) + O(\varepsilon)$$

Au premier ordre l'équation (5.22) devient :

$$\partial_t(H\overline{\mathbf{U}}_h) + \operatorname{div}_h(H\overline{\mathbf{U}}_h \otimes \overline{\mathbf{U}}_h) + \frac{1}{Fr^2}H\nabla_h\zeta = -K_0\overline{\mathbf{U}}_h$$

L'équation en surface libre donne quant à elle :

$$\partial_t\zeta + \operatorname{div}_h(H\overline{\mathbf{U}}_h) = 0$$

En variables dimensionnelles on obtient alors le système de Saint-Venant du premier ordre suivant :

$$\begin{cases} \partial_t H + \operatorname{div}_h(H\mathbf{u}) = 0 \\ \partial_t(H\mathbf{u}) + \operatorname{div}_h(H\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + gH\nabla_h\zeta = -k\mathbf{u} \end{cases}$$

□

On remarque donc, comme c'est le cas dans [17] et [28], que les termes de viscosité n'apparaissent pas à l'ordre 1. Il faudra donc pousser l'analyse asymptotique jusqu'à l'ordre 2.

5.3.4 Équations de Saint-Venant à l'ordre 2

Lemme 5.3. *Le système de Saint-Venant à l'ordre 2 s'écrit :*

$$\begin{cases} \partial_t H + \operatorname{div}_h(H\mathbf{u}) = 0 & \text{dans } \omega \times \mathbb{R}^+ \\ \partial_t(H\mathbf{u}) + \operatorname{div}_h(H\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + gH\nabla_h\zeta = -\frac{k}{1 + \frac{kH}{3\mu}}\mathbf{u} + 2\mu \operatorname{div}_h(HD_h(\mathbf{u})) & \text{dans } \omega \times \mathbb{R}^+ \end{cases} \quad (5.23)$$

Démonstration

D'après l'équation (5.15), on a

$$\begin{aligned}
\frac{\nu}{\varepsilon^2} \partial_z^2 \mathbf{U}_h &= \partial_t \mathbf{U}_h + \operatorname{div}_h(\mathbf{U}_h \otimes \mathbf{U}_h) + \partial_z(\mathbf{U}_h W) - 2\nu \operatorname{div}_h(D_h \mathbf{U}_h) - \nu \nabla_h \partial_z W + \frac{1}{Fr^2} \nabla_h \zeta \\
&= \partial_t \bar{\mathbf{U}}_h + \operatorname{div}_h(\bar{\mathbf{U}}_h \otimes \bar{\mathbf{U}}_h) + \frac{1}{Fr^2} \nabla_h \zeta + O(\varepsilon) \\
&= -\frac{K_0}{H} \mathbf{U}_h(x, y, -b, t) + O(\varepsilon)
\end{aligned}$$

En intégrant entre $-b$ et z et en utilisant la condition de Navier qui donne au premier ordre la relation $\frac{\nu_0}{\varepsilon} \partial_z \mathbf{U}_H|_{z=-b} = K_0 \mathbf{U}_h|_{z=-b} + O(\varepsilon)$, on obtient :

$$\frac{\nu_0}{\varepsilon} \partial_z \mathbf{U}_h = K_0 \mathbf{U}_h|_{z=-b} \left(1 - \frac{z+b}{H}\right) + O(\varepsilon) \quad (5.24)$$

Ensuite, en réintégrant une deuxième fois, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbf{U}_h(x, y, z, t) &= \mathbf{U}_h(x, y, -b, t) \left(1 + \varepsilon \frac{K_0}{\nu_0} \int_{-b}^z \left(1 - \frac{s+b}{H}\right) ds\right) + O(\varepsilon^2) \\
&= \mathbf{U}_h(x, y, -b, t) \left(1 + \varepsilon \frac{K_0}{\nu_0} (z+b) \left(1 - \frac{z+b}{2H}\right)\right) + O(\varepsilon^2)
\end{aligned} \quad (5.25)$$

D'où

$$\bar{\mathbf{U}}_h = \mathbf{U}_h(x, y, -b, t) \left(1 + \frac{K_0 H \varepsilon}{3\nu_0}\right) + O(\varepsilon^2) \quad (5.26)$$

Puis, on a :

$$\mathbf{U}_h^2(x, y, z, t) = \mathbf{U}_h^2(x, y, -b, t) \left(1 + 2\varepsilon \frac{K_0}{\nu_0} (z+b) \left(1 - \frac{z+b}{2H}\right)\right) + O(\varepsilon^2)$$

et donc d'après (5.26), on a :

$$\begin{aligned}
\overline{\mathbf{U}_h^2} &= \mathbf{U}_h^2(x, y, -b, t) \left(1 + \frac{2K_0 H \varepsilon}{3\nu_0}\right) + O(\varepsilon^2) \\
&= \bar{\mathbf{U}}_h^2 \left(1 + \frac{2K_0 H \varepsilon}{3\nu_0}\right) \left(1 - \frac{2K_0 H \varepsilon}{3\nu_0}\right) + O(\varepsilon^2) \\
&= \bar{\mathbf{U}}_h^2 + O(\varepsilon^2)
\end{aligned}$$

De même on peut montrer que :

$$\overline{\mathbf{U}_h \otimes \mathbf{U}_h} = \bar{\mathbf{U}}_h \otimes \bar{\mathbf{U}}_h + O(\varepsilon^2)$$

En ne gardant que les termes d'ordre 2 en ε dans l'équation (5.22), on obtient :

$$\begin{aligned}
\partial_t (H \bar{\mathbf{U}}_h) + \operatorname{div}_h (H \bar{\mathbf{U}}_h \otimes \bar{\mathbf{U}}_h) + \frac{1}{Fr^2} H \nabla_h \zeta &= 2\nu \operatorname{div}_h (H D_h(\bar{\mathbf{U}}_h)) \\
&\quad - \frac{K_0}{1 + \frac{K_0 H \varepsilon}{3\nu_0}} \bar{\mathbf{U}}_h - 2\nu \partial_z W \nabla_h b
\end{aligned}$$

Pour négliger le terme $2\nu\partial_z W\nabla_h b$, il est nécessaire de faire une hypothèse sur $\nabla_h b$, à savoir $\nabla_h b = O(\varepsilon)$. Cette hypothèse parait en tout état de cause assez raisonnable pour des fonds faiblement variables.

En revenant aux variables dimensionnelles, le système Saint-Venant à l'ordre 2 est alors :

$$\begin{cases} \partial_t H + \operatorname{div}_h(H\mathbf{u}) = 0 \\ \partial_t(H\mathbf{u}) + \operatorname{div}_h(H\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + gH\nabla_h \zeta = -\frac{k}{1 + \frac{kH}{3\mu}}\mathbf{u} + 2\mu\operatorname{div}_h(HD_h(\mathbf{u})) \end{cases}$$

□

5.4 Modèles linéarisés

Dans la perspective de mettre en œuvre un algorithme de couplage efficace de type Schwarz, on va dans la suite linéariser le système des équations de Navier-Stokes hydrostatiques (5.12) et en déduire le système de Saint-Venant linéarisé. Cela permettra d'utiliser les techniques usuelles pour développer les opérateurs absorbants conduisant à une convergence rapide de l'algorithme de couplage.

5.4.1 Équations de Navier-Stokes hydrostatiques linéarisées

Dans la suite on fait l'hypothèse qu'on est en présence d'un fond plat $b(x, y) = h$ dans ω , où h est maintenant une constante. Ensuite, on linéarise le système (5.12) autour de la vitesse constante $(\mathbf{U}_0, w_0) = (u_0, v_0, 0)$ et autour de $\zeta_0 = 0$.

Les composantes du vecteur vitesse et ζ s'écrivent alors :

$$U = u_0 + \tilde{U}, \quad V = v_0 + \tilde{V}, \quad W = \tilde{W} \quad \text{et} \quad \zeta = \tilde{\zeta}$$

Lemme 5.4. *Le système (5.12) linéarisé autour du profil $(u_0, v_0, 0, 0)$ s'écrit :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \mathbf{U}_h + \mathbf{U}_0 \cdot \nabla_h \mathbf{U}_h - \mu \Delta \mathbf{U}_h + g \nabla_h \zeta = 0 \quad \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+ = \omega \times [-h, 0] \times \mathbb{R}^+ \\ \partial_t \zeta + h \operatorname{div}_h(\overline{\mathbf{U}}_h) + \mathbf{U}_0 \cdot \nabla_h \zeta = 0 \\ \operatorname{div}_h \mathbf{U}_h + \partial_z W = 0 \\ \mu \partial_z \mathbf{U}_h = 0 \quad \text{en } z = 0 \\ -\mu \partial_z \mathbf{U}_h + k \mathbf{U}_h = 0 \quad \text{en } z = -h \\ W(x, y, -h, t) = 0 \\ \mathbf{U}_h = \mathbf{U}^d \quad \text{sur } \partial\Omega \setminus (\Gamma_B \cup \Gamma_T) \\ \zeta = \zeta^d \quad \text{sur } \partial\omega \\ \mathbf{U}_h(., 0) = \mathbf{U}^{ini} \quad \text{dans } \Omega \quad \text{et} \quad \zeta(., 0) = \zeta^{ini} \quad \text{dans } \omega \end{array} \right. \quad (5.27)$$

Démonstration

En utilisant le fait que la vitesse horizontale $\mathbf{U}_0 = (u_0, v_0)$ est une constante et que $w_0 = 0$, l'équation des moments s'écrit :

$$\partial_t \tilde{\mathbf{U}}_h + \mathbf{U}_0 \cdot \nabla \tilde{\mathbf{U}}_h + \tilde{\mathbf{U}}_h \cdot \nabla \tilde{\mathbf{U}}_h - \mu \Delta \tilde{\mathbf{U}}_h + g \nabla_h \tilde{\zeta} = 0$$

Ensuite, on néglige le terme non-linéaire $\tilde{\mathbf{U}}_h \cdot \nabla \tilde{\mathbf{U}}_h$. En omettant le signe tilde \sim on obtient l'équation des moments linéarisée :

$$\partial_t \mathbf{U}_h + \mathbf{U}_0 \cdot \nabla_h \mathbf{U}_h - \mu \Delta \mathbf{U}_h + g \nabla_h \zeta = 0$$

L'équation de continuité donne :

$$\operatorname{div}_h \tilde{\mathbf{U}}_h + \partial_z \tilde{W} = 0$$

L'équation en surface libre donne :

$$\partial_t \zeta + \operatorname{div}_h \left(\int_{-h}^{\zeta} \mathbf{U}_h dz \right) = 0$$

et

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \left(\int_{-h}^{\zeta} \mathbf{U}_h dz \right) &= \operatorname{div} \left(\int_{-h}^0 (\mathbf{U}_0 + \tilde{\mathbf{U}}_h) + \int_0^{\zeta} (\mathbf{U}_0 + \tilde{\mathbf{U}}_h) dz \right) \\ &= h \operatorname{div}(\overline{\mathbf{U}}_h) + \mathbf{U}_0 \cdot \nabla_h \zeta + \operatorname{div} \left(\int_0^{\zeta} \tilde{\mathbf{U}}_h \right) \end{aligned}$$

En négligeant le terme $\operatorname{div}(\int_0^{\zeta} \tilde{\mathbf{U}}_h)$ et en omettant \sim , on obtient :

$$\partial_t \zeta + h \operatorname{div}(\overline{\mathbf{U}}_h) + \mathbf{U}_0 \cdot \nabla_h \zeta = 0$$

Enfin, les conditions de continuité du tenseur de contraintes à la surface, la condition d'imperméabilité et la condition de Navier au fond deviennent :

$$\partial_z \mathbf{U}_h = 0 \quad \text{en} \quad z = 0$$

$$W(x, y, -h, t) = 0$$

et

$$-\mu \partial_z \mathbf{U}_h + k \mathbf{U}_h = 0 \quad \text{en} \quad z = -h$$

Le système linéarisé (5.27) est défini dans le domaine fixe $\omega \times [-h, 0] \times \mathbb{R}^+ = \Omega \times \mathbb{R}^+$.

Dans la suite, comme le terme W disparaît de l'équation des moments, on désignera par les équations de Navier-Stokes hydrostatiques linéaires le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \mathbf{U}_h + \mathbf{U}_0 \cdot \nabla_h \mathbf{U}_h - \mu \Delta \mathbf{U}_h + g \nabla_h \zeta = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{R}^+ = \omega \times [-h, 0] \times \mathbb{R}^+ \\ \partial_t \zeta + h \operatorname{div}_h(\overline{\mathbf{U}}_h) + \mathbf{U}_0 \cdot \nabla_h \zeta = 0 \\ \mu \partial_z \mathbf{U}_h = 0 \quad \text{en} \quad z = 0 \\ -\mu \partial_z \mathbf{U}_h + k \mathbf{U}_h = 0 \quad \text{en} \quad z = -h \\ \mathbf{U}_h = \mathbf{U}^d \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \setminus (\Gamma_B \cup \Gamma_T) \\ \zeta = \zeta^d \quad \text{sur} \quad \partial\omega \\ \mathbf{U}_h(., 0) = \mathbf{U}^{ini} \quad \text{dans} \quad \Omega, \text{ et } \zeta(., 0) = \zeta^{ini} \quad \text{dans} \quad \omega \end{array} \right. \quad (5.28)$$

en gardant à l'esprit que W s'obtient à partir de :

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}_h \mathbf{U}_h + \partial_z W = 0 \\ W(x, y, -h, t) = 0 \end{array} \right. \quad (5.29)$$

5.4.2 Dérivation des équations de Saint-Venant linéaires à partir des équations de Navier-Stokes hydrostatiques linéarisées

Comme dans le cas non-linéaire, on suppose que le domaine Ω est peu profond. On définit donc le petit paramètre $\varepsilon = \frac{h}{L_c}$, où L_c désigne la longueur horizontale caractéristique. La hauteur caractéristique est égale dans le cas linéaire à h .

On introduit ensuite les variables et les paramètres sans dimension suivants :

$$(x, y) = L_c(\tilde{x}, \tilde{y}), \quad z = h\tilde{z}, \quad t = \frac{L_c}{U_c}\tilde{t}, \quad \mathbf{U}_h = U_c \tilde{\mathbf{U}}_h, \quad \zeta = h\tilde{\zeta}$$

et

$$\nu = \frac{1}{Re} = \frac{\mu}{L_c U_c}, \quad Fr = \frac{U_c}{\sqrt{gh}}$$

Le système (5.28) s'écrit en variables adimensionnelles :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \mathbf{U}_h + \mathbf{U}_0 \cdot \nabla_h \mathbf{U}_h - \nu \Delta_h \mathbf{U}_h - \frac{\nu}{\varepsilon^2} \partial_z^2 \mathbf{U}_h + \frac{1}{Fr^2} \nabla_h \zeta = 0 \quad \text{dans } \tilde{\omega} \times [-1, 0] \times \mathbb{R}^+ \\ \partial_t \zeta + \operatorname{div}_h(\bar{\mathbf{U}}_h) + \mathbf{U}_0 \cdot \nabla_h \zeta = 0 \\ \nu \partial_z \mathbf{U}_h = 0 \quad \text{en } z = 0 \\ -\frac{\nu}{\varepsilon} \partial_z \mathbf{U}_h + K \mathbf{U}_h = 0 \quad \text{en } z = -1 \\ \mathbf{U}_h(., 0) = \mathbf{U}^{ini} \quad \text{dans } \tilde{\omega} \times [-1, 0] \quad , \text{ et } \quad \zeta(., 0) = \zeta^{ini} \quad \text{dans } \tilde{\omega} \end{array} \right. \quad (5.30)$$

Équation des moments intégrée

Comme dans le cas non-linéaire, on commence par intégrer l'équation des moments. Dans le cas linéaire on obtient :

Lemme 5.5. *L'équation des moments intégrée s'écrit :*

$$\partial_t \bar{\mathbf{U}}_h + (\mathbf{U}_0 \cdot \nabla_h) \bar{\mathbf{U}}_h - \nu \Delta_h \bar{\mathbf{U}}_h + \frac{K}{\varepsilon} \mathbf{U}_h|_{z=-1} + \frac{1}{Fr^2} \nabla_h \zeta = 0 \quad (5.31)$$

Démonstration

Il suffit d'intégrer entre -1 et 0 et d'utiliser la condition aux limites au fond. \square

Système de Saint-Venant linéaire à l'ordre 1

Lemme 5.6. *Le système de Saint-Venant linéaire à l'ordre 1 s'écrit en variables dimensionnelles :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \zeta + h \operatorname{div}_h(\mathbf{u}) + \mathbf{U}_0 \cdot \nabla_h \zeta = 0 \\ \partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{U}_0 \cdot \nabla_h) \mathbf{u} + g \nabla_h \zeta = -\frac{k}{h} \mathbf{u} \end{array} \right. \quad (5.32)$$

Démonstration

On suppose qu'on a $\nu = \varepsilon \nu_0$ et que $K = \varepsilon K_0$. D'après le système (5.30), on déduit que :

$$\partial_z \mathbf{U}_h = O(\varepsilon), \quad \text{et} \quad \partial_z \mathbf{U}_h|_{z=-1} = O(\varepsilon)$$

D'où

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_h(x, y, z, t) &= \mathbf{U}_h(x, y, -1, t) + O(\varepsilon) \\ &= \bar{\mathbf{U}}_h(x, y, t) + O(\varepsilon) \end{aligned}$$

En ne gardant que les termes d'ordre 1 dans l'équation des moments intégrée (5.31) et dans l'équation de continuité, on obtient le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \zeta + \operatorname{div}_h(\bar{\mathbf{U}}_h) + \mathbf{U}_0 \cdot \nabla_h \zeta = 0 \\ \partial_t \bar{\mathbf{U}}_h + (\mathbf{U}_0 \cdot \nabla_h) \bar{\mathbf{U}}_h + \frac{1}{Fr^2} \nabla_h \zeta = -K_0 \bar{\mathbf{U}}_h \end{array} \right.$$

Il suffit ensuite de revenir aux variables dimensionnelles. \square

Système de Saint-Venant linéaire d'ordre 2

Lemme 5.7. *Le système de Saint-Venant linéaire à l'ordre 2 s'écrit en variables dimensionnelles :*

$$\begin{cases} \partial_t \zeta + h \operatorname{div}_h(\mathbf{u}) + \mathbf{U}_0 \cdot \nabla_h \zeta = 0 \\ \partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{U}_0 \cdot \nabla_h) \mathbf{u} + g \nabla_h \zeta = -\frac{k}{h + \frac{kh^2}{3\mu}} \mathbf{u} + \mu \Delta_h \mathbf{u} \end{cases} \quad (5.33)$$

Démonstration

D'après la première équation du système (5.30), on a :

$$\begin{aligned} \frac{\nu_0}{\varepsilon} \partial_z^2 \mathbf{U}_h &= \partial_t \mathbf{U}_h + \mathbf{U}_0 \cdot \nabla \mathbf{U}_h - \mu \Delta_h \mathbf{U}_h + \frac{1}{Fr^2} \nabla_h \zeta \\ &= \partial_t \bar{\mathbf{U}}_h + \mathbf{U}_0 \cdot \nabla \bar{\mathbf{U}}_h + \frac{1}{Fr^2} \nabla_h \zeta + O(\varepsilon) \\ &= -K_0 \mathbf{U}_h|_{z=-1} + O(\varepsilon) \end{aligned}$$

En intégrant entre z et 0 on obtient :

$$\partial_z \mathbf{U}_h = -\frac{K_0 \varepsilon}{\nu_0} z \mathbf{U}_h|_{z=-1} + O(\varepsilon^2)$$

Ensuite, en intégrant à nouveau, entre -1 et z cette fois-ci, on a

$$\mathbf{U}_h = \mathbf{U}_h|_{z=-1} \left(1 - \frac{K_0 \varepsilon}{2\nu_0} (z^2 - 1) \right) + O(\varepsilon^2) \quad (5.34)$$

On en déduit la relation d'ordre 2 suivante :

$$\bar{\mathbf{U}}_h = \mathbf{U}_h|_{z=-1} \left(1 + \frac{K_0 \varepsilon}{3\nu_0} \right) + O(\varepsilon^2) \quad (5.35)$$

À partir de l'équation (5.31), on obtient à l'ordre 2 :

$$\partial_t \bar{\mathbf{U}}_h + (\mathbf{U}_0 \cdot \nabla_h) \bar{\mathbf{U}}_h - \nu \Delta_h \bar{\mathbf{U}}_h + \frac{K_0}{1 + \frac{K_0 \varepsilon}{3\nu_0}} \bar{\mathbf{U}}_h + \frac{1}{Fr^2} \nabla_h \zeta = 0$$

Enfin il suffit de revenir aux variables dimensionnelles. \square

5.4.3 Linéarisation du système de Saint-Venant 2-D

Si on linéarise directement le système (5.23) de Saint-Venant non linéaire autour de la vitesse constante $\mathbf{U}_0 = (u_0, v_0)$ et autour de $\zeta_0 = 0$ (dans ce cas on a $H = h + \zeta$ où ζ est très petit), on obtient le système (5.36) ci-dessous. Celui-ci est différent du système (5.33), ce qui signifie que les opérations linéarisation et moyenne verticale ne commutent pas.

Lemme 5.8. *Le système de Saint-Venant linéarisé s'écrit :*

$$\begin{cases} \partial_t \zeta + h \operatorname{div}_h(\mathbf{u}) + \mathbf{U}_0 \cdot \nabla_h \zeta = 0 \\ \partial_t(h\mathbf{u}) + (h\mathbf{U}_0 \cdot \nabla_h) \mathbf{u} + \frac{g}{2} h \nabla_h \zeta = -\alpha \mathbf{u} + 2\mu \operatorname{div}(h D_h(\mathbf{u})) - \alpha \mathbf{U}_0 + \beta \mathbf{U}_0 \zeta \end{cases} \quad (5.36)$$

$$\text{où } \alpha = \frac{k}{1 + \frac{kh}{3\mu}} \text{ et } \beta = \frac{k^2}{3\mu(1 + \frac{kh}{3\mu})^2}.$$

Démonstration

Compte-tenu du fait que l'équation du fond ne dépend pas du temps, la première équation s'écrit aussi :

$$\partial_t \zeta + \operatorname{div}_h(H\mathbf{u}) = 0$$

Elle se linéarise donc de la même manière que celle du système des équations primitives.

Ensuite, on a :

$$\begin{aligned} \partial_t(H\mathbf{u}) + \operatorname{div}_h(H\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \frac{g}{2} H \nabla_h \zeta &= \partial_t(h + \zeta)(\mathbf{U}_0 + \tilde{\mathbf{u}}) + \operatorname{div}_h((h + \zeta)(\mathbf{U}_0 + \tilde{\mathbf{u}}) \otimes (\mathbf{U}_0 + \tilde{\mathbf{u}})) \\ &\quad + \frac{g}{2}(h + \zeta) \nabla_h \zeta \end{aligned}$$

En ne gardant que les termes linéaires, on obtient :

$$\partial_t \tilde{\mathbf{u}} + (h\mathbf{U}_0 \cdot \nabla_h) \tilde{\mathbf{u}} + \frac{g}{2} h \nabla_h \zeta$$

Le terme $2\mu \operatorname{div}_h(H D_h(\mathbf{u}))$ se linéarise en $2\mu \operatorname{div}_h(h D_h(\tilde{\mathbf{u}}))$.

Enfin, le terme de traînée s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{k}{1 + \frac{kH}{3\mu}} \mathbf{u} &= \frac{k}{1 + \frac{k(h+\zeta)}{3\mu}} (\mathbf{U}_0 + \tilde{\mathbf{u}}) \\ &= \frac{k}{(1 + \frac{kh}{3\mu})(1 + \zeta \frac{k}{3\mu(1 + \frac{kh}{3\mu})})} (\mathbf{U}_0 + \tilde{\mathbf{u}}) \\ &= \frac{k}{1 + \frac{kh}{3\mu}} (\mathbf{U}_0 + \tilde{\mathbf{u}}) \left(1 - \zeta \frac{k}{3\mu(1 + \frac{kh}{3\mu})} + O(\zeta^2) \right) \end{aligned}$$

En ne gardant que les termes linéaires, on obtient :

$$\frac{k}{1 + \frac{kh}{3\mu}} \tilde{\mathbf{u}} + \frac{k}{1 + \frac{kh}{3\mu}} \mathbf{U}_0 - \frac{k^2 \mathbf{U}_0}{3\mu(1 + \frac{kh}{3\mu})^2} \zeta$$

En omettant le signe \sim on obtient le système (5.36). □

En résumé

On a rappelé dans ce chapitre comment dériver le système de Saint-Venant 2-D à partir des équations de Navier-Stokes hydrostatiques 3-D dans le cas linéaire et dans le cas non-linéaire. Dans la suite on utilisera le système de Saint-Venant (5.33) obtenu à partir du système d'équations de Navier-Stokes hydrostatiques linéarisées pour être cohérent avec la partie 1. On fera l'analyse mathématique de ce système sans terme de frottement dans le chapitre 8.

Dans le chapitre suivant, on va commencer par donner la définition du problème couplé impliquant les systèmes (5.33) et (5.28) en précisant les opérateurs de restriction et d'extension. Ensuite, on va présenter un algorithme général de couplage et on montrera que sous certaines hypothèses, la convergence de cet algorithme est équivalente à la convergence de l'algorithme usuel de décomposition de domaine du système de Saint-Venant.

Chapitre 6

Algorithme de couplage

Afin d'alléger les coûts de calcul, on va reprendre l'idée développée dans la partie 1, à savoir remplacer localement le système des équations de Navier-Stokes hydrostatiques linéaires 3-D par le système de Saint-Venant 2-D et résoudre un problème couplé entre ces deux modèles. On commencera par donner la définition de la notion de couplage en précisant les conditions de transmission physiques. Ensuite, on présentera un algorithme de couplage sous une forme générale en indiquant le choix des opérateurs de restriction et d'extension. Enfin, grâce à l'hypothèse que la friction est nulle au fond, on va montrer que la convergence de cet algorithme est équivalente à celle de l'algorithme usuel de décomposition de domaine du système de Saint-Venant.

6.1 Définition du problème couplé

6.1.1 Les modèles à coupler

Dans ce qui suit, on divise le domaine $\Omega = \omega \times [-h, 0]$ en deux sous-domaines :

$$\Omega^- = \omega^- \times [-h, 0] \quad \text{et} \quad \Omega^+ = \omega^+ \times [-h, 0]$$

On note dans ce cas Γ l'interface entre Ω^- et Ω^+ et on suppose qu'elle est positionnée en $x = 0$. On note γ l'interface entre ω^- et ω^+ . On propose ensuite de remplacer dans le domaine Ω^- les équations de Navier-Stokes hydrostatiques linéarisées par le système de Saint-Venant (5.33). Ce dernier est donc posé dans le domaine ω^- .

On considère alors les deux modèles :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{U}_0 \cdot \nabla_h) \mathbf{u} + g \nabla_h \zeta - \mu \Delta_h \mathbf{u} = 0 & \text{dans } \omega^- \times \mathbb{R}^+ \quad (6.1a) \\ \partial_t \zeta + h \operatorname{div}_h(\mathbf{u}) + \mathbf{U}_0 \cdot \nabla_h \zeta = 0 & \text{dans } \omega^- \times \mathbb{R}^+ \quad (6.1b) \\ (\mathbf{u}, \zeta) = (\bar{\mathbf{U}}_-^d, \zeta_-^d) & \text{sur } \partial\omega_{ext}^- \times \mathbb{R}^+ \quad (6.1c) \\ \mathbf{u}(., 0) = \bar{\mathbf{U}}_-^{ini} & \text{dans } \omega^- \quad \text{et} \quad \zeta(., 0) = \zeta_-^{ini} & \text{dans } \omega^- \quad (6.1d) \end{array} \right.$$

et

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t \mathbf{U}_h + (\mathbf{U}_0 \cdot \nabla_h) \mathbf{U}_h - \mu \Delta \mathbf{U}_h + g \nabla_h \zeta = 0 & \text{dans } \Omega^+ \times \mathbb{R}^+ \quad (6.2a) \\ \partial_t \zeta + h \operatorname{div}_h(\overline{\mathbf{U}}_h) + \mathbf{U}_0 \cdot \nabla_h \zeta = 0 & \text{dans } \omega^+ \times \mathbb{R}^+ \quad (6.2b) \\ \mu \partial_z \mathbf{U}_h = 0 & \text{en } z = 0 \quad (6.2c) \\ \mu \partial_z \mathbf{U}_h = 0 & \text{en } z = -h \quad (6.2d) \\ \mathbf{U}_h = \mathbf{U}_+^d & \text{sur } (\partial\Omega_{ext}^+ \setminus \Gamma_B \cup \Gamma_T) \times \mathbb{R}^+ \quad (6.2e) \\ \zeta = \zeta_+^d & \text{sur } \partial\omega_{ext}^+ \times \mathbb{R}^+ \quad (6.2f) \\ \mathbf{U}_h(., 0) = \mathbf{U}_+^{ini} & \text{dans } \Omega^+ \text{ et } \zeta(., 0) = \zeta_+^{ini} & \text{dans } \omega^+ \quad (6.2g) \end{array} \right.$$

qu'on cherche à coupler à travers les interfaces γ et $\Gamma = \gamma \times [-h, 0]$. Les frontières $\partial\omega_{ext}^-$ et $\partial\Omega_{ext}^+$ désignent respectivement $\partial\omega^- \setminus \gamma$ et $\Omega^+ \setminus \Gamma$.

On rappelle ici que $\mathbf{U}_h = (U, V)$ désigne le vecteur vitesse horizontale en dimension 3 d'espace :

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_h : \Omega^+ \subset \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\longmapsto (U, V) \end{aligned}$$

tandis que \mathbf{u} désigne le vecteur vitesse horizontale en dimension 2 d'espace :

$$\begin{aligned} \mathbf{u} : \omega^- \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (u, v) \end{aligned}$$

La solution du système (6.2) est dans ce cas notée (\mathbf{U}_h, ζ) et celle de (6.1) est notée (\mathbf{u}, ζ) , où ζ désigne dans les deux cas (par abus de notation) la surface libre.

On a linéarisé dans le chapitre précédent le système des équations de Navier-Stokes hydrostatiques autour de la vitesse $(\mathbf{U}_0, 0) = (u_0, v_0, 0)$, ce qui a conduit à la disparition des termes en W dans l'équation des moments. Toutefois la vitesse verticale peut toujours s'obtenir en résolvant l'équation de continuité munie de la condition d'imperméabilité au fond, voir (5.29).

Remarques :

- Dans ce chapitre on considère qu'il n'y a pas frottement au fond, ce qui simplifie les équations mais n'enlève pas pour autant les difficultés du calcul des opérateurs absorbants exacts des deux systèmes ci-dessus (voir chapitre 7).
- Il s'agit ici d'une formulation sans forçage extérieur ni terme source, ce qui se traduit par des seconds membres nuls dans (6.2). Ajouter de tels termes ne changerait pas la nature du problème mathématique qu'on étudie ici.

Ces deux modèles seront couplés à travers des conditions à l'interface, dont la forme générale est :

$$\mathcal{B}_-(\mathbf{u}, \zeta_-) = \mathcal{B}_-(\mathcal{R}(\mathbf{U}_h, \zeta_+)) \quad \text{sur } \gamma \times \mathbb{R}^+ \quad (6.3)$$

$$\mathcal{B}_+(\mathbf{U}_h, \zeta_+) = \mathcal{B}_+(\mathcal{E}(\mathbf{u}, \zeta_-)) \quad \text{sur } \Gamma \times \mathbb{R}^+ \quad (6.4)$$

où les opérateurs \mathcal{R} et \mathcal{E} sont respectivement l'opérateur de restriction (ou de projection) sur γ et l'opérateur d'extension (ou de relèvement) sur Γ qui restent à définir, et où les opérateurs aux limites \mathcal{B}_- et \mathcal{B}_+ restent à déterminer.

6.1.2 Conditions de transmission physiques

Comme on l'a vu dans les chapitres 2 et 3, un outil important pour le choix des conditions aux limites est la détermination des conditions de transmission physiques associées aux modèles, c'est-à-dire les quantités naturellement transmises par ces équations.

Lemme 6.1. *Les conditions de transmission pour le système des équations de Navier-Stokes hydrostatiques (5.28) à travers l'interface Γ traduisent la continuité des deux quantités suivantes :*

$$\left(\mu \partial_x \mathbf{U}_h - u_0 \mathbf{U}_h - g \begin{pmatrix} \zeta \\ 0 \end{pmatrix}, u_0 \zeta + h \bar{U} \right) \quad (6.5)$$

Démonstration

Soit $\mathbf{V} \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^2)$. En effectuant son produit scalaire dans $L^2(\Omega)$ avec l'équation (6.2a), on a

$$\int_{\Omega} \partial_t \mathbf{U}_h \cdot \mathbf{V} + \int_{\Omega} (\mathbf{U}_0 \cdot \nabla_h) \mathbf{U}_h \cdot \mathbf{V} - \mu \int_{\Omega} \Delta \mathbf{U}_h \cdot \mathbf{V} + g \int_{\Omega} \nabla_h \zeta \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (6.6)$$

En utilisant les formules de Green et de Stokes et le fait que \mathbf{V} est à support compact, on trouve :

$$\int_{\Omega} \partial_t \mathbf{U}_h \cdot \mathbf{V} - \int_{\Omega} (\mathbf{U}_0 \cdot \nabla_h) \mathbf{V} \cdot \mathbf{U}_h + \mu \int_{\Omega} \nabla_h \mathbf{U}_h : \nabla_h \mathbf{V} + \mu \int_{\Omega} \partial_z \mathbf{U}_h \cdot \partial_z \mathbf{V} - g \int_{\Omega} \zeta \operatorname{div}_h \mathbf{V} = 0 \quad (6.7)$$

où : désigne le produit contracté (voir [5] pour la définition).

D'un autre côté, en utilisant le fait que $\Omega = \Omega^- \cup \Omega^+$, l'équation (6.6) devient :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^+} \partial_t \mathbf{U}_h \cdot \mathbf{V} + \int_{\Omega^+} (\mathbf{U}_0 \cdot \nabla_h) \mathbf{U}_h \cdot \mathbf{V} - \mu \int_{\Omega^+} \Delta \mathbf{U}_h \cdot \mathbf{V} + g \int_{\Omega^+} \nabla_h \zeta \cdot \mathbf{V} \\ & + \int_{\Omega^-} \partial_t \mathbf{U}_h \cdot \mathbf{V} + \int_{\Omega^-} (\mathbf{U}_0 \cdot \nabla_h) \mathbf{U}_h \cdot \mathbf{V} - \mu \int_{\Omega^-} \Delta \mathbf{U}_h \cdot \mathbf{V} + g \int_{\Omega^-} \nabla_h \zeta \cdot \mathbf{V} = 0 \end{aligned}$$

Ensuite, en intégrant par parties sur chaque sous-domaine, on trouve :

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega^+} \partial_t \mathbf{U}_h^+ \cdot \mathbf{V} - \int_{\Omega^+} (\mathbf{U}_0 \cdot \nabla_h) \mathbf{V} \cdot \mathbf{U}_h^+ + \int_{\Gamma} u_0 (\mathbf{U}_h^+ \cdot \mathbf{V}) n_1^+ + \int_{\Gamma} v_0 (\mathbf{U}_h^+ \cdot \mathbf{V}) n_2^+ + \mu \int_{\Omega^+} \nabla_h \mathbf{U}_h^+ : \nabla_h \mathbf{V} \\
& \quad + \mu \int_{\Omega^+} \partial_z \mathbf{U}_h^+ \cdot \partial_z \mathbf{V} - \mu \int_{\Gamma} \partial_{n^+} \mathbf{U}_h^+ \cdot \mathbf{V} - g \int_{\Omega^+} \zeta \operatorname{div}_h \mathbf{V} + g \int_{\Gamma} \zeta \begin{pmatrix} n_1^+ \\ n_2^+ \end{pmatrix} \cdot \mathbf{V} \\
& + \int_{\Omega^-} \partial_t \mathbf{U}_h^- \cdot \mathbf{V} - \int_{\Omega^-} (\mathbf{U}_0 \cdot \nabla_h) \mathbf{V} \cdot \mathbf{U}_h^- + \int_{\Gamma} u_0 (\mathbf{U}_h^- \cdot \mathbf{V}) n_1^- + \int_{\Gamma} v_0 (\mathbf{U}_h^- \cdot \mathbf{V}) n_2^- + \mu \int_{\Omega^-} \nabla_h \mathbf{U}_h^- : \nabla_h \mathbf{V} \\
& \quad + \mu \int_{\Omega^-} \partial_z \mathbf{U}_h^- \cdot \partial_z \mathbf{V} - \mu \int_{\Gamma} \partial_{n^-} \mathbf{U}_h^- \cdot \mathbf{V} - g \int_{\Omega^-} \zeta \operatorname{div}_h \mathbf{V} + g \int_{\Gamma} \zeta \begin{pmatrix} n_1^- \\ n_2^- \end{pmatrix} \cdot \mathbf{V} \\
& \hspace{25em} = 0
\end{aligned}$$

où \mathbf{U}_h^+ et \mathbf{U}_h^- désignent les valeurs de \mathbf{U}_h de part et d'autre de l'interface.

Les vecteurs $n^+ = (n_1^+, n_2^+, n_3^+)^t$ et $n^- = (n_1^-, n_2^-, n_3^-)^t$ sont respectivement les normales sortantes à Ω^+ et Ω^- ($n^+ = -n^-$ sur Γ).

En regroupant les différents termes, on a :

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \partial_t \mathbf{U}_h \cdot \mathbf{V} - \int_{\Omega} (\mathbf{U}_0 \cdot \nabla_h) \mathbf{V} \cdot \mathbf{U}_h + \mu \int_{\Omega} \nabla_h \mathbf{U}_h : \nabla_h \mathbf{V} + \mu \int_{\Omega} \partial_z \mathbf{U}_h \cdot \partial_z \mathbf{V} - g \int_{\Omega} \zeta \operatorname{div}_h \mathbf{V} \\
& \quad + \int_{\Gamma} u_0 (\mathbf{U}_h^+ \cdot \mathbf{V}) n_1^+ + \int_{\Gamma} v_0 (\mathbf{U}_h^+ \cdot \mathbf{V}) n_2^+ - \mu \int_{\Gamma} \partial_{n^+} \mathbf{U}_h^+ \cdot \mathbf{V} + g \zeta_+ \int_{\Gamma} \begin{pmatrix} n_1^+ \\ n_2^+ \end{pmatrix} \cdot \mathbf{V} \\
& \quad + \int_{\Gamma} u_0 (\mathbf{U}_h^- \cdot \mathbf{V}) n_1^- + \int_{\Gamma} v_0 (\mathbf{U}_h^- \cdot \mathbf{V}) n_2^- - \mu \int_{\Gamma} \partial_{n^-} \mathbf{U}_h^- \cdot \mathbf{V} + g \zeta_- \int_{\Gamma} \begin{pmatrix} n_1^- \\ n_2^- \end{pmatrix} \cdot \mathbf{V} = 0
\end{aligned}$$

En utilisant (6.7), on obtient $\forall \mathbf{V} \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^2)$:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Gamma} (u_0 \mathbf{U}_h^+ n_1^+ + v_0 \mathbf{U}_h^+ n_2^+) \cdot \mathbf{V} - \mu \int_{\Gamma} \partial_{n^+} \mathbf{U}_h^+ \cdot \mathbf{V} + g \zeta_+ \int_{\Gamma} \begin{pmatrix} n_1^+ \\ n_2^+ \end{pmatrix} \cdot \mathbf{V} \\
& + \int_{\Gamma} (u_0 \mathbf{U}_h^- n_1^- + v_0 \mathbf{U}_h^- n_2^-) \cdot \mathbf{V} - \mu \int_{\Gamma} \partial_{n^-} \mathbf{U}_h^- \cdot \mathbf{V} + g \zeta_- \int_{\Gamma} \begin{pmatrix} n_1^- \\ n_2^- \end{pmatrix} \cdot \mathbf{V} = 0
\end{aligned}$$

On a donc sur l'interface Γ :

$$-\mu \partial_{n^+} \mathbf{U}_h^+ + (u_0 \mathbf{U}_h^+ n_1^+ + v_0 \mathbf{U}_h^+ n_2^+) + g \zeta_+ \begin{pmatrix} n_1^+ \\ n_2^+ \end{pmatrix} = \mu \partial_{n^-} \mathbf{U}_h^- - (u_0 \mathbf{U}_h^- n_1^- + v_0 \mathbf{U}_h^- n_2^-) - g \zeta_- \begin{pmatrix} n_1^- \\ n_2^- \end{pmatrix}$$

En plaçant l'interface Γ en $x = 0$ on a $n^+ = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $n^- = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, d'où la continuité à travers l'interface Γ du terme :

$$\mu \partial_x \mathbf{U}_h - u_0 \mathbf{U}_h - g \begin{pmatrix} \zeta \\ 0 \end{pmatrix} \tag{6.8}$$

ce qui constitue la première condition de transmission.

De la même manière, en effectuant le produit scalaire de (6.2b) par χ dans $\mathcal{D}(\overline{\omega})$, on a :

$$\int_{\omega} \partial_t \zeta \chi + h \int_{\omega} \operatorname{div}(\overline{\mathbf{U}}_h) \chi + \int_{\omega} \mathbf{U}_0 \cdot \nabla_h \zeta \chi = 0 \tag{6.9}$$

En effectuant des intégrations par parties dans ω , on trouve :

$$\int_{\omega} \partial_t \zeta \chi - h \int_{\omega} \bar{\mathbf{U}}_h \cdot \nabla_h \chi - \int_{\omega} u_0 \zeta \partial_x \chi - \int_{\omega} v_0 \zeta \partial_y \chi = 0 \quad (6.10)$$

Par ailleurs (6.10) s'écrit :

$$\int_{\omega^+} \partial_t \zeta \chi + h \int_{\omega^+} \operatorname{div}(\bar{\mathbf{U}}_h) \chi + \int_{\omega^+} \mathbf{U}_0 \cdot \nabla_h \zeta \chi + \int_{\omega^-} \partial_t \zeta \chi + h \int_{\omega^-} \operatorname{div}(\bar{\mathbf{U}}_h) \chi + \int_{\omega^-} \mathbf{U}_0 \cdot \nabla_h \zeta \chi = 0 \quad (6.11)$$

En intégrant par parties dans chaque sous-domaine, on trouve :

$$\begin{aligned} & \int_{\omega^+} \partial_t \zeta_+ \chi - h \int_{\omega^+} \bar{\mathbf{U}}_h^+ \cdot \nabla_h \chi + h \int_{\gamma} \bar{\mathbf{U}}_h^+ \cdot \mathbf{n}^+ \chi - \int_{\omega^+} u_0 \zeta_+ \partial_x \chi - \int_{\omega^+} v_0 \zeta_+ \partial_y \chi + \int_{\gamma} \mathbf{U}_0 \cdot \mathbf{n}^+ \zeta_+ \chi \\ & + \int_{\omega^-} \partial_t \zeta_- \chi - h \int_{\omega^-} \bar{\mathbf{U}}_h^- \cdot \nabla_h \chi + h \int_{\gamma} \bar{\mathbf{U}}_h^- \cdot \mathbf{n}^- \chi - \int_{\omega^-} u_0 \zeta_- \partial_x \chi - \int_{\omega^-} v_0 \zeta_- \partial_y \chi + \int_{\gamma} \mathbf{U}_0 \cdot \mathbf{n}^- \zeta_- \chi = 0 \end{aligned}$$

où $\mathbf{n}^+ = (n_1^+, n_2^+)$ et $\mathbf{n}^- = (n_1^-, n_2^-)$ désignent respectivement les normales sortantes à ω^+ et ω^- .

En utilisant (6.10), on en déduit que :

$$h \int_{\gamma} \bar{\mathbf{U}}_h^+ \cdot \mathbf{n}^+ \chi + \int_{\gamma} \mathbf{U}_0 \cdot \mathbf{n}^+ \zeta_+ \chi + h \int_{\gamma} \bar{\mathbf{U}}_h^- \cdot \mathbf{n}^- \chi + \int_{\gamma} \mathbf{U}_0 \cdot \mathbf{n}^- \zeta_- \chi = 0$$

On a alors sur l'interface γ :

$$(h \bar{\mathbf{U}}_h^+ + \zeta_+ \mathbf{U}_0) \cdot \mathbf{n}^+ = -(h \bar{\mathbf{U}}_h^- + \zeta_- \mathbf{U}_0) \cdot \mathbf{n}^-$$

En considérant une interface γ placée en $x = 0$, on a la continuité de la quantité :

$$u_0 \zeta + h \bar{U}$$

□

Lemme 6.2. *De même, les conditions physiques de transmission pour le système de Saint-Venant à travers l'interface $\gamma \times \mathbb{R}^+$ sont la continuité des deux quantités :*

$$\left(\mu \partial_x \mathbf{u} - u_0 \mathbf{u} - g \begin{pmatrix} \zeta \\ 0 \end{pmatrix}, u_0 \zeta + h u \right) \quad (6.12)$$

Démonstration

Identique à celle du lemme précédent.

□

Remarque : les conditions de transmissions (6.5) et (6.12) sont très proches, ce qui est cohérent avec le fait que les équations de Saint-Venant 2D ont été obtenues par moyenne verticale des équations de Navier-Stokes hydrostatiques 3-D.

6.1.3 Définition du problème couplé

Ayant obtenu les conditions de transmission pour le modèle 2-D et le modèle 3-D, il est donc raisonnable de choisir comme conditions de transmission physiques pour le modèle couplé la moyenne verticale des conditions de transmission du système des équations de Navier-Stokes hydrostatiques 3-D à travers l'interface de couplage γ . On va donc définir la notion de couplage entre les deux modèles comme suit :

Définition 6.1. *On appelle problème couplé, le problème défini par les systèmes (6.1) et (6.2), tel qu'à l'interface γ on ait :*

$$\mu \partial_x \mathbf{u} - u_0 \mathbf{u} - g \begin{pmatrix} \zeta_- \\ 0 \end{pmatrix} = \mu \partial_x \bar{\mathbf{U}}_h - u_0 \bar{\mathbf{U}}_h - g \begin{pmatrix} \zeta_+ \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.13)$$

et

$$u_0 \zeta_- + h u = u_0 \zeta_+ + h \bar{U} \quad (6.14)$$

6.2 Algorithme de couplage

6.2.1 Algorithme de Schwarz

Le problème couplé étant défini, on peut maintenant mettre en œuvre un algorithme de couplage de type Schwarz pour en trouver une solution. Cet algorithme est défini par :

Initialisation : \mathbf{U}_h^0 et ζ_+^0 donnés

À l'étape k ($k \geq 0$), résoudre :

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{SVL}(\mathbf{u}^{k+1}, \zeta_-^{k+1}) & = 0 \quad \text{dans } \omega^- \times \mathbb{R}^+ \\ \mathcal{B}_-^{ext}(\mathbf{u}^{k+1}, \zeta_-^{k+1}) & = G_-^{ext} \quad \text{sur } \partial\omega_{ext}^- \times \mathbb{R}^+ \\ \mathcal{B}_-(\mathbf{u}^{k+1}, \zeta_-^{k+1}) & = \mathcal{B}_-(\mathcal{R}(\mathbf{U}_h^k, \zeta_+^k)) \quad \text{sur } \gamma \times \mathbb{R}^+ \\ \mathbf{u}^{k+1}(., 0) = \bar{\mathbf{U}}_-^{ini} & \text{dans } \omega^- \quad \text{et } \zeta_-^{k+1}(., 0) = \zeta_-^{ini} \quad \text{dans } \omega^- \end{cases}$$

puis

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{NSHL}(\mathbf{U}_h^{k+1}, \zeta_+^{k+1}) & = 0 \quad \text{dans } (\Omega^+ \times \mathbb{R}^+) \times (\omega^+ \times \mathbb{R}^+) \\ \mathcal{B}_+^{ext}(\mathbf{U}_h^{k+1}, \zeta_+^{k+1}) & = G_+^{ext} \quad \text{sur } \partial\Omega_{ext}^+ \times \mathbb{R}^+ \\ \mathcal{B}_+(\mathbf{U}_h^{k+1}, \zeta_+^{k+1}) & = \mathcal{B}_+(\mathcal{E}(\mathbf{u}^{k+1}, \zeta_-^{k+1})) \quad \text{sur } \Gamma \times \mathbb{R}^+ \\ \mathbf{U}_h^{k+1}(., 0) = \mathbf{U}_+^{ini} & \text{dans } \Omega^+ \quad \text{et } \zeta_+^{k+1}(., 0) = \zeta_+^{ini} \quad \text{dans } \omega^+ \end{cases}$$

Algorithme 6.1: Algorithme de Schwarz de couplage multi-dimensionnel

Dans ces équations, \mathcal{L}_{SVL} désigne les équations (6.1a) et (6.1b) et \mathcal{L}_{NSHL} les équations (6.2a) et (6.2b). Les frontières extérieures sont $\partial\omega_{ext}^- = \partial\omega^- \setminus \gamma$, $\partial\Omega_{ext}^+ = \partial\Omega^+ \setminus \Gamma$ et les opérateurs

\mathcal{B}_-^{ext} et \mathcal{B}_+^{ext} correspondent aux conditions aux limites sur ces bords (G_-^{ext} et G_+^{ext} prennent donc les valeurs 0 ou $(\bar{\mathbf{U}}_d^d \zeta_-^d)$ et $(\mathbf{U}_+^d, \zeta_+^d)$ selon que l'on ait des conditions de type Neumann ou des conditions de type Dirichlet).

Les opérateurs aux limites \mathcal{B}_- et \mathcal{B}_+ restent à définir de façon à satisfaire à convergence les conditions de transmission physiques (6.13) et (6.14). Leur choix ainsi que celui des opérateurs \mathcal{R} et \mathcal{E} est crucial afin de rendre la convergence de l'algorithme de couplage possible, et même optimale.

6.2.2 Définition des opérateurs \mathcal{R} et \mathcal{E}

Comme dans le chapitre 1, on définit les opérateurs \mathcal{R} et \mathcal{E} de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{R} : \Lambda_{3D} \times \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \Lambda_{2D} \times \mathbb{R}^+ \\ (\mathbf{U})|_{\Gamma \times \mathbb{R}^+} &\longmapsto (\mathcal{R}\mathbf{U})|_{\gamma \times \mathbb{R}^+} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{E} : \Lambda_{2D} \times \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \Lambda_{3D} \times \mathbb{R}^+ \\ (\mathbf{u})|_{\gamma \times \mathbb{R}^+} &\longmapsto (\mathcal{E}\mathbf{u})|_{\Gamma \times \mathbb{R}^+} \end{aligned}$$

où Λ_{2D} et Λ_{3D} désignent respectivement les espaces de fonctions traces sur γ pour les fonctions à variables 2-D en espace et sur Γ pour les fonctions à variables 3-D en espace.

On définit ici l'opérateur \mathcal{R} comme étant l'opérateur de moyenne verticale, de façon cohérente avec la dérivation des équations de Saint-Venant à partir des équations de Navier-Stokes hydrostatiques :

$$\begin{aligned} \mathcal{R} : \Lambda_{3D} \times \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \Lambda_{2D} \times \mathbb{R}^+ \\ (\mathbf{U}_h)|_{\Gamma \times \mathbb{R}^+} &\longmapsto \frac{1}{h} \int_{\Gamma} (\mathbf{U}_h)|_{\Gamma \times \mathbb{R}^+} dz \end{aligned}$$

c'est à dire $\mathcal{R}(\mathbf{U}_h)(0, y, t) = \frac{1}{h} \int_{\Gamma} \mathbf{U}_h(0, y, z, t) dz$.

Au vu des relations (5.34) et (5.35) et du fait qu'ici on n'a pas de frottement au fond, on propose de définir l'opérateur \mathcal{E} de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{E} : \Lambda_{2D} \times \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \Lambda_{3D} \times \mathbb{R}^+ \\ (\mathbf{u})|_{\gamma \times \mathbb{R}^+} &\longmapsto (\mathbf{u})|_{\Gamma \times \mathbb{R}^+} \end{aligned}$$

c'est à dire $\mathcal{E}(\mathbf{u})(0, y, z, t) = \mathbf{u}(0, y, t)$.

Cela signifie que l'on impose uniformément sur Γ les quantités venant du modèle 2-D. Cette répartition serait nécessairement non uniforme en z si on avait un terme de frottement au fond et/ou un terme de forçage en surface.

Remarque : on a précisé la valeur des opérateurs \mathcal{R} et \mathcal{E} pour \mathbf{U}_h et \mathbf{u} . Cette définition peut être étendue pour la surface libre ζ (qui dépend de deux variables d'espace que ce soit pour le modèle 2-D ou pour le modèle 3-D). Dans ce cas, on a tout simplement $\mathcal{R}(\zeta) = \zeta$ et $\mathcal{E}(\zeta) = \zeta$.

6.2.3 Choix des opérateurs \mathcal{B}_- et \mathcal{B}_+

Comme on l'a indiqué ci-dessus, le choix des opérateurs \mathcal{B}_- et \mathcal{B}_+ doit permettre de satisfaire à convergence les conditions de transmission physiques (6.13) et (6.14). Un autre critère du choix de ces opérateurs est la vitesse de convergence de l'algorithme 6.1. En effet, les méthodes de relaxation d'ondes ou les méthodes de couplage équidimensionnel utilisent l'opérateur *Dirichlet-to-Neumann* pour définir les opérateurs absorbants exacts (voir chapitre 1 et [1]). Ceci permet d'avoir une convergence optimale, c'est-à-dire en deux itérations. On s'intéressera dans le chapitre 7 au calcul de ces opérateurs absorbants que l'on notera \mathcal{B}_-^{opt} et \mathcal{B}_+^{opt} .

Par ailleurs, dans la prochaine section on établira que la convergence de l'algorithme de couplage 6.1 dépend essentiellement de la convergence de l'algorithme usuel 2-D/2-D de décomposition de domaine des équations de Saint-Venant. C'est ce qui guidera le choix des opérateurs \mathcal{B}_- et \mathcal{B}_+ .

6.2.4 Convergence de l'algorithme de couplage

Décomposition en modes verticaux

Pour étudier la convergence de l'algorithme de couplage 6.1, on commence par décomposer le système des équations (6.2) en modes verticaux. Cela revient à calculer les modes propres de l'opérateur $-\partial_z^2$ dans $[-h, 0]$ avec des conditions de type Neumann homogènes (voir [4], [39] et [1]). On va résoudre donc le système suivant :

$$\begin{cases} \partial_z^2 w + \lambda w = 0 \\ \partial_z w = 0 \quad \text{en} \quad z = 0 \\ \partial_z w = 0 \quad \text{en} \quad z = -h \end{cases} \quad (6.15)$$

On trouve alors la base orthonormée :

$$w_n(z) := \alpha_n \cos\left(\frac{n\pi z}{h}\right), \quad \text{et} \quad \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{h}\right)^2, \quad \text{où} \quad \alpha_0 = 1 \quad \text{et} \quad \alpha_n = \sqrt{2}, n > 0$$

Maintenant on cherche \mathbf{U}_h sous la forme :

$$\mathbf{U}_h(x, y, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{U}_h^n(x, y, t) w_n(z) = \bar{\mathbf{U}}_h + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{U}_h^n(x, y, t) w_n(z)$$

où $\bar{\mathbf{U}}_h = \frac{1}{h} \int_{-h}^0 \mathbf{U}_h dz$ (attention ici à ne pas confondre les exposants avec les indices des itérations de Schwarz).

On injecte cette expression dans (6.2). Ensuite, en multipliant par w_n , en intégrant entre $-h$ et 0 en utilisant le fait que la base $(w_n)_{n \geq 0}$ est orthonormée et par linéarité, on trouve :

- Pour $n = 0$ (appelé vitesse barotrope, couplée avec la hauteur d'eau) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \bar{\mathbf{U}}_h + (\mathbf{U}_0 \cdot \nabla_h) \bar{\mathbf{U}}_h + g \nabla_h \zeta - \mu \Delta_h \bar{\mathbf{U}}_h = 0 \quad \text{dans} \quad \omega^+ \times \mathbb{R}^+ \\ \partial_t \zeta + h \operatorname{div}_h(\bar{\mathbf{U}}_h) + \mathbf{U}_0 \cdot \nabla_h \zeta = 0 \quad \text{dans} \quad \omega^+ \times \mathbb{R}^+ \\ (\bar{\mathbf{U}}_h, \zeta) = (\bar{\mathbf{U}}_+^d, \zeta_+^d) \quad \text{sur} \quad \partial \omega_{ext}^+ \times \mathbb{R}^+ \\ (\bar{\mathbf{U}}_h(\cdot, 0), \zeta(\cdot, 0)) = (\bar{\mathbf{U}}_+^{ini}, \zeta_+^{ini}) \quad \text{dans} \quad \omega^+ \end{array} \right. \quad (6.16)$$

Ce système d'équations n'est autre que celui des équations de Saint-Venant 2-D défini dans le domaine ω^+ .

- Pour $n \geq 1$:

$$\partial_t \mathbf{U}_h^n + (\mathbf{U}_0 \cdot \nabla_h) \mathbf{U}_h^n - \mu \Delta_h \mathbf{U}_h^n + \frac{\mu(n\pi)^2}{h^2} \mathbf{U}_h^n = 0 \quad \text{dans} \quad \omega^+ \times \mathbb{R}^+ \quad (6.17)$$

La vitesse $\mathbf{U}_h - \bar{\mathbf{U}}_h$ (appelée vitesse barocline) vérifie donc le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial (\mathbf{U}_h - \bar{\mathbf{U}}_h)}{\partial t} + (\mathbf{U}_0 \cdot \nabla_h) (\mathbf{U}_h - \bar{\mathbf{U}}_h) - \mu \Delta (\mathbf{U}_h - \bar{\mathbf{U}}_h) = 0 & \text{dans} \quad \Omega^+ \times \mathbb{R}^+ \\ \mathcal{B}_+^{ext} (\mathbf{U}_h - \bar{\mathbf{U}}_h) = G_+^{ext} - \bar{G}_+^{ext} & \text{sur} \quad \partial\Omega_{ext}^+ \times \mathbb{R}^+ \\ (\mathbf{U}_h - \bar{\mathbf{U}}_h) (\cdot, 0) = \mathbf{U}_+^{ini} - \bar{\mathbf{U}}_+^{ini} & \text{dans} \quad \Omega^+ \end{array} \right. \quad (6.18)$$

Reformulation de l'algorithme de Schwarz

L'algorithme 6.1 peut alors se réécrire de la façon suivante en utilisant les opérateurs \mathcal{R} et \mathcal{E} définis ci-dessus :

Initialisation : $(\mathbf{U}_h)^0$ et ζ_+^0 donnés

À l'étape k ($k \geq 0$), résoudre :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{L}_{SVL} (\mathbf{u}^{k+1}, \zeta_-^{k+1}) = 0 & \text{dans} \quad \omega^- \times \mathbb{R}^+ \\ \mathcal{B}_-^{ext} (\mathbf{u}^{k+1}, \zeta_-^{k+1}) = G_-^{ext} & \text{sur} \quad \partial\omega_{ext}^- \times \mathbb{R}^+ \\ \mathcal{B}_- (\mathbf{u}^{k+1}, \zeta_-^{k+1}) = \mathcal{B}_- (\bar{\mathbf{U}}_h^k, \zeta_+^k) & \text{sur} \quad \gamma \times \mathbb{R}^+ \\ \mathbf{u}^{k+1}(\cdot, 0) = \bar{\mathbf{U}}_-^{ini} & \text{dans} \quad \omega^- \quad \text{et} \quad \zeta_-^{k+1}(\cdot, 0) = \zeta_-^{ini} \quad \text{dans} \quad \omega^- \end{array} \right.$$

puis

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{L}_{SVL} (\bar{\mathbf{U}}_h^{k+1}, \zeta_+^{k+1}) = 0 & \text{dans} \quad (\omega^+ \times \mathbb{R}^+)^2 \\ \mathcal{B}_+^{ext} (\bar{\mathbf{U}}_h^{k+1}, \zeta_+^{k+1}) = \bar{G}_+^{ext} & \text{sur} \quad \partial\omega_{ext}^+ \times \mathbb{R}^+ \\ \mathcal{B}_+^0 (\bar{\mathbf{U}}_h^{k+1}, \zeta_+^{k+1}) = \mathcal{B}_+^0 (\mathbf{u}^{k+1}, \zeta_-^{k+1}) & \text{sur} \quad \gamma \times \mathbb{R}^+ \\ \bar{\mathbf{U}}_h^{k+1}(\cdot, 0) = \bar{\mathbf{U}}_+^{ini} & \text{dans} \quad \omega^+ \quad \text{et} \quad \zeta_+^{k+1}(\cdot, 0) = \zeta_+^{ini} \quad \text{dans} \quad \omega^+ \end{array} \right.$$

et

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{L}_{CD} ((\mathbf{U}_h - \bar{\mathbf{U}}_h)^{k+1}) = 0 & \text{dans} \quad \Omega^+ \times \mathbb{R}^+ \\ \mathcal{B}_+^{ext} ((\mathbf{U}_h - \bar{\mathbf{U}}_h)^{k+1}) = G_+^{ext} - \bar{G}_+^{ext} & \text{sur} \quad \partial\Omega_{ext}^+ \times \mathbb{R}^+ \\ \mathcal{B}_+' ((\mathbf{U}_h - \bar{\mathbf{U}}_h)^{k+1}) = 0 & \text{sur} \quad \Gamma \times \mathbb{R}^+ \\ (\mathbf{U}_h - \bar{\mathbf{U}}_h)^{k+1}(\cdot, 0) = \mathbf{U}_+^{ini} - \bar{\mathbf{U}}_+^{ini} & \text{dans} \quad \Omega^+ \end{array} \right.$$

Algorithme 6.2: Algorithme de Schwarz de couplage multi-dimensionnel

où l'opérateur \mathcal{B}_+^0 est la restriction de l'opérateur \mathcal{B}_+ pour les fonctions à deux variables de l'espace, \mathcal{B}'_+ est obtenu à partir de \mathcal{B}_+ en annulant tous les termes qui dépendent de ζ_+ et enfin \mathcal{L}_{CD} désigne l'opérateur $\partial_t + (\mathbf{U}_0 \cdot \nabla_h) - \mu \Delta$.

Convergence de l'algorithme

On peut alors énoncer le résultat suivant :

Lemme 6.3. *L'algorithme de couplage 6.1 converge si et seulement si l'algorithme de décomposition de domaine pour le système de Saint-Venant 2-D défini par :*

$\bar{\mathbf{u}}_+^0$ et ζ_+^0 donnés

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{L}_{SVL} \left(\mathbf{u}_-^{k+1}, \zeta_-^{k+1} \right) &= 0 \quad \text{dans } \omega_t^- \\ \mathcal{B}_-^{ext} \left(\mathbf{u}_-^{k+1}, \zeta_-^{k+1} \right) &= G_-^{ext} \quad \text{sur } \omega_{t,ext}^- \\ \mathcal{B}_- \left(\mathbf{u}_-^{k+1}, \zeta_-^{k+1} \right) &= \mathcal{B}_- (\mathbf{u}_+^k, \zeta_+^k) \quad \text{sur } \gamma_t \\ \left(\mathbf{u}_-^{k+1}, \zeta_-^{k+1} \right) (., 0) &= \left(\bar{\mathbf{U}}_-^{ini}, \zeta_-^{ini} \right) \quad \text{dans } \omega^- \end{array} \right.$$

puis

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{L}_{SVL} \left(\bar{\mathbf{U}}_h^{k+1}, \zeta_+^{k+1} \right) &= 0 \quad \text{dans } \omega_t^+ \\ \mathcal{B}_+^{ext} \left(\bar{\mathbf{U}}_h^{k+1}, \zeta_+^{k+1} \right) &= \bar{G}_+^{ext} \quad \text{sur } \partial\omega_{t,ext}^+ \\ \mathcal{B}_+^0 \left(\bar{\mathbf{U}}_h^{k+1}, \zeta_+^{k+1} \right) &= \mathcal{B}_+^0 (\mathbf{u}_-^{k+1}, \zeta_-^{k+1}) \quad \text{sur } \gamma_t \\ \left(\bar{\mathbf{U}}_h^{k+1}, \zeta_+^{k+1} \right) (., 0) &= \left(\bar{\mathbf{U}}_+^{ini}, \zeta_+^{ini} \right) \quad \text{dans } \omega^+ \end{array} \right.$$

(où $\omega_t^- = \omega^- \times \mathbb{R}^+$, $\omega_t^+ = \omega^+ \times \mathbb{R}^+$, $\gamma_t = \gamma \times \mathbb{R}^+$, $\partial\omega_{ext}^- = \partial\omega_{ext}^- \times \mathbb{R}^+$ et $\partial\omega_{ext}^+ = \partial\omega_{ext}^+ \times \mathbb{R}^+$) converge, et la vitesse barocline $\mathbf{U}_h - \bar{\mathbf{U}}_h$ est solution du système :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U}_0 \cdot \nabla_h) \mathbf{U} - \mu \Delta \mathbf{U} &= 0 \quad \text{dans } \Omega^+ \times \mathbb{R}^+ \\ \mathcal{B}_+^{ext} (\mathbf{U}) &= G_+^{ext} - \bar{G}_+^{ext} \quad \text{sur } \partial\Omega_{ext}^+ \times \mathbb{R}^+ \\ \mathcal{B}'_+ (\mathbf{U}) &= 0 \quad \text{sur } \Gamma \times \mathbb{R}^+ \\ \mathbf{U}(., 0) &= \mathbf{U}_+^{ini} - \bar{\mathbf{U}}_+^{ini} \quad \text{dans } \Omega^+ \end{array} \right.$$

Démonstration

Ce lemme est une conséquence directe de l'algorithme 6.2. □

Remarque : ce résultat ne sera plus valable si on considère un terme de frottement au fond ou si les modèles sont non linéaires. En effet les modes propres de l'opérateur $-\partial_z^2$ ne pourront plus être découplés.

En résumé

On a montré dans ce chapitre que si l'on considère une friction nulle au fond, la convergence de l'algorithme de couplage 6.1 est équivalente à celle de l'algorithme de décomposition de domaine du système de Saint-Venant. Dans le chapitre 7, afin d'optimiser la convergence de ces algorithmes, on s'intéressera au calcul des opérateurs absorbants pour le système de Saint-Venant. On donnera aussi l'expression des opérateurs absorbants pour les modes baroclines. On verra, comme c'est le cas souvent, que pour avoir des expressions utilisables de ces opérateurs, il faudrait certaines hypothèses restrictives.

Chapitre 7

Conditions absorbantes exactes pour les équations de Navier-Stokes hydrostatiques linéaires et pour le système de Saint-Venant linéaire

Dans ce chapitre, afin d'optimiser la convergence de l'algorithme de couplage 6.1, on s'intéressera au calcul des opérateurs absorbants exacts et approchés du système de Saint-Venant. On donnera aussi ceux des modes baroclines, même si dans le cas d'une friction nulle au fond, ces derniers n'interviennent pas dans la convergence de l'algorithme de couplage.

L'étude des opérateurs absorbants exacts des équations de Navier-Stokes hydrostatiques et des équations de Saint-Venant dans le cadre classique de la décomposition de domaine a été effectuée dans [1], [32] et [19]. Dans [1], E. Audusse, P. Dreyfuss et B. Merlet se sont intéressés au système des équations primitives des océans. Ces équations contiennent un terme supplémentaire par rapport aux équations de Navier-Stokes hydrostatiques qu'on considère ici, à savoir le terme de Coriolis dû à la rotation de la Terre. Le calcul des opérateurs absorbants aboutit, comme c'est souvent le cas, à des opérateurs non locaux en espace et en temps. Les auteurs de [1] ont effectué une approximation de ces opérateurs en supposant qu'on ait un nombre de Rossby très petit. Dans [32], V. Martin s'est intéressée au cas des équations de Saint-Venant avec viscosité linéarisées autour d'une vitesse nulle. L'approximation est effectuée en supposant que la viscosité est très petite. Dans cette thèse, on considère un cadre plus général dans le sens où on linéarise autour d'une vitesse non nulle.

Enfin dans [19], L. Halpern fait l'étude des conditions aux limites transparentes dans le cadre général des équations incomplètement paraboliques. A la fin de cet article, on trouve une application pour les équations de Navier-Stokes 2-D et les équations de Saint-Venant 2-D. Pour ce dernier système, elle donne une approximation en fonction des fréquences de l'opérateur absorbant dans le domaine $\omega^- = \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}$ selon que l'on est dans un régime subsonique ou transsonique, et selon qu'on est en présence d'un flux entrant ou sortant.

Dans la suite de ce chapitre, pour le calcul des opérateurs absorbants des équations de Navier-Stokes hydrostatiques 3-D et des équations de Saint-Venant 2-D, on adoptera une démarche similaire à celles utilisées dans les articles cités ci-dessus. Concernant les équations de Navier-Stokes hydrostatiques, l'approximation de l'opérateur absorbant sera faite en supposant que le

rapport d'aspect ε défini dans le chapitre 5, ainsi que l'inverse du nombre de Reynolds, sont très petits. Comme on l'a vu dans le chapitre 6, seul le calcul de l'opérateur absorbant du mode barotrope, c'est-à-dire celui de Saint-Venant 2-D, suffit pour la convergence de l'algorithme de couplage. Pour l'obtenir, on se positionnera donc dans le cadre classique de la décomposition de domaine des équations de Saint-Venant. Après quelques hypothèses pour simplifier les expressions de ces opérateurs, on retrouvera en particulier pour le domaine ω^- l'approximation faite dans [19].

7.1 Définition des opérateurs absorbants exacts \mathcal{B}_-^{opt} et \mathcal{B}_+^{opt}

Comme on l'a indiqué dans les chapitres 1 et 6, et afin d'avoir une convergence optimale de l'algorithme de couplage 6.1, un choix judicieux consisterait à exploiter les opérateurs absorbants exacts du système de Saint Venant-2D et du système des équations de Navier-Stokes 3-D. Par analogie avec les méthodes traditionnelles de relaxations d'ondes ou les méthodes de couplage équidimensionnel, on va utiliser l'opérateur *Dirichlet-to-Neumann* pour définir ces opérateurs absorbants exacts (voir chapitre 1).

Hypothèse : comme dans [1], on suppose ici $u_0 > 0$. En négligeant le terme visqueux, la partie hyperbolique de l'équation est dominante. Pour avoir un problème bien posé, on a alors besoin d'imposer des conditions aux limites pour \mathbf{U}_h et pour ζ à l'entrée du domaine Ω^+ (voir par exemple [4]). En revanche, à l'entrée du domaine ω^- seule une condition aux limites en \mathbf{u} suffit. Le cas $u_0 < 0$ se traite de façon similaire et les résultats correspondants seront donnés au fur et à mesure de l'avancée de ce chapitre.

Pour définir l'opérateur absorbant exact $\mathcal{B}_-^{NSHL,opt}$ pour les équations de Navier-Stokes hydrostatiques, on s'appuie sur la quantité transmise (6.5).

En adoptant les mêmes notations que dans [1], l'opérateur *Dirichlet-to-Neumann* permettant de définir $\mathcal{B}_-^{NSHL,opt}$ est défini de la façon suivante (voir [1], [38] par exemple) :

Définition 7.1. Soit $(\mathbf{U}_h^b, \zeta^b)$ donné et (\mathbf{U}_h, ζ) solution de :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}_{NSHL}(\mathbf{U}_h, \zeta) = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega^+ \times \mathbb{R}^+ \\ \mathbf{U}_h(., 0) = \mathbf{U}_+^{ini} \quad \text{dans} \quad \Omega^+ \quad \text{et} \quad \zeta(., 0) = \zeta_+^{ini} \quad \text{dans} \quad \omega^+ \\ \mathcal{B}_+^{ext}(\mathbf{U}_h, \zeta) = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega_{ext}^+ \\ (\mathbf{U}_h, \zeta) = (\mathbf{U}_h^b, \zeta^b) \quad \text{sur} \quad \Gamma \end{array} \right.$$

où \mathcal{L}_{NSHL} désigne l'ensemble des équations (6.2a) et (6.2b) et l'opérateur \mathcal{B}_+^{ext} correspond aux conditions aux limites (6.2c) et (6.2d).

L'opérateur *Dirichlet-to-Neumann* est alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_-^{\mathbf{U}_h} : (\Gamma \times \mathbb{R}^+) \times (\gamma \times \mathbb{R}^+) &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (\mathbf{U}_h^b, \zeta^b) &\longmapsto \left(\mu \partial_x \mathbf{U}_h - u_0 \mathbf{U}_h - g \begin{pmatrix} \zeta \\ 0 \end{pmatrix} \right) |_{\Gamma \times \mathbb{R}^+} \end{aligned}$$

L'opérateur $\mathcal{B}_-^{NSHL,opt}$ est dans ce cas défini par :

$$\mathcal{B}_-^{NSHL,opt}(\mathbf{U}_h, \zeta) = \left(\mu \partial_x \mathbf{U}_h - u_0 \mathbf{U}_h - g \begin{pmatrix} \zeta \\ 0 \end{pmatrix} - \mathcal{S}_-^{\mathbf{U}_h}(\mathbf{U}_h, \zeta) \right)$$

Maintenant, on peut définir l'opérateur \mathcal{B}_-^{opt} comme dans le chapitre 1 de façon à avoir :

$$\mathcal{B}_-^{opt} \circ \mathcal{R} = \mathcal{R} \circ \mathcal{B}_-^{NSHL,opt}$$

De la même façon, on va définir l'opérateur 3-D \mathcal{B}_+^{opt} à partir de l'opérateur absorbant exact 2-D du système (6.1) que l'on notera $\mathcal{B}_+^{SVL,opt}$.

En s'appuyant sur la quantité transmise (6.12), les opérateurs *Dirichlet-to-Neumann* $\mathcal{S}_+^{\mathbf{u}}$ et \mathcal{S}_+^{ζ} sont définis par :

Définition 7.2. Soit (\mathbf{u}^b, ζ^b) donné et (\mathbf{u}, ζ) solution de :

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{SVL}(\mathbf{u}, \zeta) = 0 & \text{dans } \omega^- \times \mathbb{R}^+ \\ \mathbf{u}(., 0) = \overline{\mathbf{U}}_-^{ini} & \text{et } \zeta(., 0) = \zeta_-^{ini} & \text{dans } \omega^- \\ (\mathbf{u}, \zeta) = (0, 0) & \text{sur } \partial\omega_{ext}^- \times \mathbb{R}^+ \\ (\mathbf{u}, \zeta) = (\mathbf{u}^b, \zeta^b) & \text{sur } \gamma \end{cases}$$

où \mathcal{L}_{SVL} désigne l'ensemble des équations (6.1a) et (6.1b).

L'opérateur *Dirichlet-to-Neumann* est alors :

$$\begin{aligned} (\mathcal{S}_+^{\mathbf{u}}, \mathcal{S}_+^{\zeta}) : (\gamma \times \mathbb{R}^+)^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (\mathbf{u}^b, \zeta^b) &\longmapsto \left(-\mu \partial_x \mathbf{u} + u_0 \mathbf{u} + g \begin{pmatrix} \zeta \\ 0 \end{pmatrix}, u_0 \zeta + h \bar{u} \right) |_{\gamma \times \mathbb{R}^+} \end{aligned}$$

L'expression de l'opérateur absorbant 2-D est donnée dans ce cas par :

$$\mathcal{B}_+^{SVL,opt}(\mathbf{u}, \zeta) = \left(-\mu \partial_x \mathbf{u} + u_0 \mathbf{u} + g \begin{pmatrix} \zeta \\ 0 \end{pmatrix} - \mathcal{S}_+^{\mathbf{u}}(\mathbf{u}, \zeta), u_0 \zeta + h \bar{u} - \mathcal{S}_+^{\zeta}(\mathbf{u}, \zeta) \right)$$

Ainsi, au vu de la définition de l'opérateur \mathcal{E} , on peut définir l'opérateur \mathcal{B}_+^{opt} comme étant l'extension canonique de l'opérateur $\mathcal{B}_+^{SVL,opt}$ à des fonctions dépendant de trois variables en espace.

7.2 Transformée de Laplace des modèles

Afin de calculer les opérateurs absorbants exacts des équations de Navier-Stokes hydrostatiques et du système de Saint-Venant, on va calculer dans ce qui suit la transformée de Laplace en temps et la transformée de Fourier par rapport à la variable y du système adimensionnel correspondant au système des équations de Navier-Stokes hydrostatiques linéarisées (6.2) avec des conditions initiales nulles (en effet les opérateurs absorbants sont calculés sur les systèmes vérifiés par les erreurs). La mise sous forme adimensionnelle du système (6.2) permettra plus tard l'approximation des opérateurs absorbants obtenus. Enfin, de la décomposition en modes verticaux du système, on déduira la transformée de Laplace-Fourier du système de Saint-Venant. On suppose dans la suite que $\Omega = \mathbf{R}^2 \times [-h, 0]$, $\omega = \mathbf{R}^2$, $\omega^- = \mathbf{R}^- \times \mathbf{R}$ et $\omega^+ = \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}$.

La transformée de Laplace-Fourier du système adimensionnel correspondant à (6.2) donne

$$\begin{cases} \left[s + u_0 \partial_x + i\eta v_0 - \nu \partial_x^2 + \nu \eta^2 - \frac{\nu}{\varepsilon^2} \partial_z^2 \right] \widehat{\mathbf{U}}_h + \frac{1}{\text{Fr}^2} \begin{pmatrix} \partial_x \\ i\eta \end{pmatrix} \widehat{\zeta} = 0 \\ [s + u_0 \partial_x + i\eta v_0] \widehat{\zeta} + \partial_x \widehat{\bar{U}} + i\eta \widehat{\bar{V}} = 0 \end{cases} \quad (7.1)$$

où $\eta \in \mathbb{R}$ est la variable de Fourier, et $s = \sigma + i\tau \in \mathbb{C}$ avec $\sigma > 0$ la variable de Laplace. On rappelle que $Fr = \frac{U_c}{\sqrt{gh}}$ est le nombre de Froude et que ν est l'inverse du nombre de Reynolds, voir (5.3).

Pour calculer les conditions absorbantes exactes sur l'interface, on décompose la vitesse selon des modes verticaux comme au paragraphe 6.2.4. Cela revient à calculer les modes propres de l'opérateur $-\partial_z^2$ avec des conditions de type Neumann homogènes, cette fois-ci dans $[-1, 0]$. Ceci donne comme vecteurs et valeurs propres :

$$w_n(z) := \alpha_n \cos(n\pi z), \quad \text{et} \quad \lambda_n = (n\pi)^2, \quad \text{où} \quad \alpha_0 = 1 \quad \text{et} \quad \alpha_n = \sqrt{2}, n > 0$$

Comme dans le chapitre 6, on cherche $\widehat{\mathbf{U}}_h$ sous la forme :

$$\widehat{\mathbf{U}}_h(x, \eta, z, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{\mathbf{U}}_h^n(x, \eta, s) w_n(z) = \widehat{\mathbf{U}}_h(x, \eta, s) + \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{\mathbf{U}}_h^n(x, \eta, s) w_n(z)$$

On a alors :

- Pour $n = 0$ (la partie barotrope) :

$$\begin{cases} -\nu \partial_x^2 \widehat{\bar{U}}_h + u_0 \partial_x \widehat{\bar{U}}_h + \{s + i\eta v_0 + \nu \eta^2\} \widehat{\bar{U}}_h + \frac{1}{\text{Fr}^2} \begin{pmatrix} \partial_x \widehat{\zeta} \\ i\eta \widehat{\zeta} \end{pmatrix} = 0 \\ u_0 \partial_x \widehat{\zeta} + (s + i\eta v_0) \widehat{\zeta} + \partial_x \widehat{\bar{U}} + i\eta \widehat{\bar{V}} = 0 \end{cases} \quad (7.2)$$

- Pour $n \geq 1$ (correspondant à la vitesse barocline $\widehat{\mathbf{U}}_h - \widehat{\bar{U}}_h$) :

$$-\nu \partial_x^2 \widehat{\mathbf{U}}_h^n + u_0 \partial_x \widehat{\mathbf{U}}_h^n + \left\{ s + i\eta v_0 + \nu \eta^2 + \frac{\nu(n\pi)^2}{\varepsilon^2} \right\} \widehat{\mathbf{U}}_h^n = 0 \quad (7.3)$$

De même la transformée de Laplace-Fourier du système adimensionnel correspondant au système de Saint-Venant linéarisé (6.1) dans le domaine $\omega^- \times \mathbb{R}^+$ est donnée par :

$$\begin{cases} -\nu \partial_x^2 \hat{\mathbf{u}} + u_0 \partial_x \hat{\mathbf{u}} + \{s + i\eta v_0 + \nu \eta^2\} \hat{\mathbf{u}} + \frac{1}{\text{Fr}^2} \begin{pmatrix} \partial_x \hat{\zeta} \\ i\eta \hat{\zeta} \end{pmatrix} = 0 \\ u_0 \partial_x \hat{\zeta} + (s + i\eta v_0) \hat{\zeta} + \partial_x \hat{u} + i\eta \hat{v} = 0 \end{cases} \quad (7.4)$$

Elle est donc bien identique au système (7.2) du mode barotrope.

7.3 Conditions absorbantes exactes pour le mode barotrope et pour le système de Saint-Venant

Comme dans [32] et [19], on cherche à obtenir la solution du système (7.4) sous la forme $\hat{X}(x) = (\hat{\mathbf{u}}(x), \hat{\zeta}(x))^t = \Phi e^{\lambda x}$. Ceci implique la résolution du système linéaire :

$$\mathbf{M}(\lambda) \Phi = 0 \quad (7.5)$$

où

$$\mathbf{M}(\lambda) = \begin{pmatrix} P(\lambda) & 0 & \frac{\lambda}{\text{Fr}^2} \\ 0 & P(\lambda) & \frac{i\eta}{\text{Fr}^2} \\ \lambda & i\eta & u_0 \lambda + s + i\eta v_0 \end{pmatrix}$$

avec $P(\lambda) = -\nu \lambda^2 + u_0 \lambda + s + \nu \eta^2 + i\eta v_0$.

7.3.1 Étude des éléments propres

Il existe une solution non nulle de (7.5) si et seulement si λ annule le déterminant de $\mathbf{M}(\lambda)$. Ce dernier est un polynôme de degré 5, mais peut se factoriser par $P(\lambda)$:

$$\det(\mathbf{M}(\lambda)) = P(\lambda) Q(\lambda)$$

$$\begin{aligned} \text{où } Q(\lambda) = & -u_0 \nu \lambda^3 + \left(u_0^2 - (s + i\eta v_0) \nu - \frac{1}{\text{Fr}^2} \right) \lambda^2 + (2(s + i\eta v_0) u_0 + \nu \eta^2 u_0) \lambda + \\ & \frac{\eta^2}{\text{Fr}^2} + (s + i\eta v_0)(s + i\eta v_0 + \nu \eta^2) \end{aligned}$$

Racines du polynôme P

Les racines du polynôme P sont :

$$\lambda_1^0 = \frac{u_0 + \sqrt{u_0^2 + 4\nu_0 \varepsilon (s + \varepsilon \nu_0 \eta^2 + i\eta v_0)}}{2\nu_0 \varepsilon} \quad \text{et} \quad \lambda_2^0 = \frac{u_0 - \sqrt{u_0^2 + 4\nu_0 \varepsilon (s + \varepsilon \nu_0 \eta^2 + i\eta v_0)}}{2\nu_0 \varepsilon}$$

où $\nu = \nu_0 \varepsilon$.

La partie réelle de λ_1^0 est positive et celle de λ_2^0 est négative (on rappelle qu'on a supposé $u_0 > 0$).

Remarque : si Z est un nombre complexe, on désigne par convention \sqrt{Z} la racine carrée de Z à partie réelle positive.

Pour ces deux racines, le noyau de la matrice $\mathbf{M}(\lambda_j^0)$, pour $j = 1, 2$ est engendré par le vecteur :

$$\Phi_j^0 = \begin{pmatrix} i\eta \\ -\lambda_j^0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad j = 1, 2$$

Racines du polynôme Q

Le polynôme Q ne possède pas de racines évidentes. Pour trouver ses racines, on dispose de plusieurs méthodes : Cardan, Hudde, etc., permettant de les écrire analytiquement. Pour des raisons de simplicité, on adopte ici une méthode proposée pour le prix Fermat junior 2005, permettant de calculer les racines d'un polynôme de degré 3 [37].

On normalise le polynôme Q en le divisant par son terme de plus haut degré pour obtenir :

$$\mathcal{Q} = -\frac{Q}{u_0 \nu} = \lambda^3 + 3a\lambda^2 + 3b\lambda + c$$

où

$$\begin{cases} a = -\frac{1}{3u_0\nu_0\varepsilon} \left(u_0^2 - \frac{1}{Fr^2} - (s + i\eta v_0)\nu_0\varepsilon \right) \\ b = -\frac{1}{3u_0\nu_0\varepsilon} (2(s + i\eta v_0)u_0 + u_0\eta^2\nu_0\varepsilon) \\ c = -\frac{1}{u_0\nu_0\varepsilon} \left(\frac{\eta^2}{Fr^2} + (s + i\eta v_0)^2 + \eta^2(s + i\eta v_0)\nu_0\varepsilon \right) \end{cases}$$

Dans la suite, on écrit ces coefficients sous la forme :

$$\begin{cases} a = \frac{1}{\varepsilon}(a_1 + a_2\varepsilon), & \text{où } a_1 = \frac{\frac{1}{Fr^2} - u_0^2}{3u_0\nu_0} \text{ et } a_2 = \frac{(s + i\eta v_0)}{3u_0} \\ b = \frac{1}{\varepsilon}(b_1 + b_2\varepsilon), & \text{où } b_1 = -\frac{2(s + i\eta v_0)}{3\nu_0} \text{ et } b_2 = -\frac{\eta^2}{3} \\ c = \frac{1}{\varepsilon}(c_1 + c_2\varepsilon), & \text{où } c_1 = -\frac{\frac{\eta^2}{Fr^2} + (s + i\eta v_0)^2}{u_0\nu_0} \text{ et } c_2 = -\frac{\eta^2(s + i\eta v_0)}{u_0} \end{cases} \quad (7.6)$$

Pour chercher les racines du polynôme \mathcal{Q} , on écrit ce dernier sous la forme :

$$\mathcal{Q}(\lambda) = (\lambda - \alpha)^3 + t(\lambda - \beta)^3$$

où α et β sont racines du polynôme $(a^2 - b)x^2 + (ab - c)x + (b^2 - ac)$.
Leurs expressions sont données par :

$$\alpha = -\frac{ab - c + \sqrt{-3a^2b^2 - 6abc + c^2 + 4a^3c + 4b^3}}{2(a^2 - b)}$$

et

$$\beta = \frac{-ab + c + \sqrt{-3a^2b^2 - 6abc + c^2 + 4a^3c + 4b^3}}{2(a^2 - b)}$$

et donc :

$$\begin{aligned} t &= -\frac{a + \alpha}{a + \beta} \\ &= \frac{-2a^3 + 3ab - c + \sqrt{-3a^2b^2 - 6abc + c^2 + 4a^3c + 4b^3}}{2a^3 - 3ab + c + \sqrt{-3a^2b^2 - 6abc + c^2 + 4a^3c + 4b^3}} \end{aligned}$$

Les racines du polynôme \mathcal{Q} (et donc de Q) s'écrivent alors en fonction des racines cubiques de t que l'on note t_j pour $3 \leq j \leq 5$:

$$\lambda_j^0 = \beta + \frac{\alpha - \beta}{1 + t_j}$$

Le noyau de la matrice $\mathbf{M}(\lambda_j^0)$ pour $3 \leq j \leq 5$ est engendré par le vecteur :

$$\Phi_j^0 = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_j^0}{Fr^2} \\ \frac{i\eta}{Fr^2} \\ -P(\lambda_j^0) \end{pmatrix} \quad \text{pour } 3 \leq j \leq 5$$

Remarque : dans la suite, et pour alléger les notations, on va omettre l'exposant des racines λ_j^0 pour $1 \leq j \leq 5$.

7.3.2 Calcul des opérateurs $\widehat{\mathcal{S}}_-^{\overline{\mathbf{U}}_h}$ et $\widehat{\mathcal{S}}_+^{\mathbf{u}}$

Dans le domaine ω^+ , on cherche des solutions du système linéaire pour le mode barotrope (7.2) qui décroissent à l'infini; on ne garde donc que les racines des polynômes P et Q à parties réelles négatives. De même, dans ω^- , pour le système (7.4), on ne garde donc que les racines à parties réelles positives.

Concernant les racines du polynôme P , λ_1 est à partie réelle positive et λ_2 est à partie réelle négative.

Pour déterminer les signes des parties réelles des racines du polynôme Q , les choses sont plus compliquées. Grâce au lemme 1.2 de [19], on a le résultat suivant :

Lemme 7.1. *On suppose que $\Re(s) > 0$. Comme $u_0 > 0$ alors $\det(M) = PQ$ admet deux racines à parties réelles positives et trois racines à parties réelles négatives.*

Comme on sait déjà que P admet une racine à partie réelle positive et une racine à partie réelle négative, on peut déduire que Q admet une racine à partie réelle positive et deux racines à parties réelles négatives.

On note dans ce cas λ_3 et λ_4 les racines à parties réelles négatives et λ_5 la racine à partie réelle positive.

Les racines que l'on garde dans le domaine ω^+ sont donc λ_2 , λ_3 et λ_4 , et celles qu'on considère dans ω^- sont λ_1 et λ_5 .

Une solution du système (7.4) dans ω^+ s'écrit comme combinaison linéaire de ces trois modes :

$$\hat{X}_+(x) = \Phi_- \exp(x\Lambda_-) \alpha_- \quad (7.7)$$

où

$$\Phi_- = \begin{pmatrix} i\eta & \frac{\lambda_3}{Fr^2} & \frac{\lambda_4}{Fr^2} \\ -\lambda_2 & \frac{i\eta}{Fr^2} & \frac{i\eta}{Fr^2} \\ 0 & -P(\lambda_3) & -P(\lambda_4) \end{pmatrix}, \quad \Lambda_- = \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \alpha_- = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix}$$

Avant de donner l'expression de $\hat{\mathcal{S}}_-^{\bar{U}_h}$, on aura besoin du résultat suivant :

Lemme 7.2. *La matrice Φ_- est inversible.*

Démonstration : on peut montrer que les colonnes de Φ_- forment une famille libre. \square

D'après (7.7), on a :

$$\begin{aligned} \partial_x \hat{X}_+(x) &= \Phi_- \Lambda_- \exp(x\Lambda_-) \alpha_- \\ &= \Phi_- \Lambda_- [\Phi_-]^{-1} \hat{X}_+(x) \end{aligned}$$

L'opérateur absorbant du mode barotrope dans le domaine ω^- s'écrit :

$$\hat{\mathcal{S}}_-^{\bar{U}_h} = \nu \left[\Phi_- \Lambda_- [\Phi_-]^{-1} \right]_{2,3} - \begin{pmatrix} u_0 & 0 & \frac{1}{Fr^2} \\ 0 & u_0 & 0 \end{pmatrix}$$

ce qui donne :

$$\begin{pmatrix} \frac{(iu_0\eta^2 + is\lambda_2 - \eta\lambda_2v_0)(-u_0 + \nu\lambda_3 + \nu\lambda_4)}{D} & \frac{N_2}{D} & \frac{iu_0\eta^2 + is\lambda_2 - \eta\lambda_2v_0}{DFr^2} \\ \frac{\nu(-\eta^2\nu + \nu\lambda_2\lambda_3 + \nu\lambda_2\lambda_4 - \nu\lambda_3\lambda_4 - u_0\lambda_2 - s - i\eta v_0)\eta\lambda_2}{D} & \frac{N_5}{D} & \frac{\nu\eta(\eta^2 - \lambda_2)}{DFr^2} \end{pmatrix}$$

où

$$\begin{cases} D = i\nu\eta^2(\lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4) + i\nu\lambda_2\lambda_3\lambda_4 + iu_0\eta^2 + is\lambda_2 - \eta\lambda_2v_0 \\ N_2 = -\nu\eta(-\nu\eta^2(\lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4) - \nu\lambda_2\lambda_3\lambda_4 + u_0\lambda_3\lambda_4 - sv\lambda_2 + s\lambda_3 + s\lambda_4 \\ \quad - i\eta\lambda_2v_0 + i\eta v_0\lambda_3 + i\eta v_0\lambda_4) \\ N_5 = -(i\nu^2\eta^4 - i\nu^2\eta^2\lambda_2^2 + i\nu^2\eta^2\lambda_3\lambda_4 - i\nu^2\lambda_2^2\lambda_3\lambda_4 + i\nu\eta^2u_0(\lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4) + i\nu u_0\lambda_2\lambda_3\lambda_4 \\ \quad + i\nu\eta^2s + i\eta^2u_0^2 - i\nu s\lambda_2^2 + isu_0\lambda_2 - \nu\eta^3v_0 + \nu\eta v_0\lambda_2^2 - \eta\lambda_2u_0v_0) \end{cases}$$

De la même façon, une solution du système (7.4) dans ω^- s'écrit comme combinaison linéaire des deux modes λ_1 et λ_5 :

$$\hat{X}_-(x) = \Phi_+ \exp(x\Lambda_+) \alpha_+ \quad (7.8)$$

où

$$\Phi_+ = \begin{pmatrix} i\eta & \frac{\lambda_5}{Fr^2} \\ -\lambda_1 & \frac{i\eta}{Fr^2} \\ 0 & -P(\lambda_5) \end{pmatrix}, \quad \Lambda_+ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \alpha_+ = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_5 \end{pmatrix}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \partial_x \hat{\mathbf{u}}_-(x) &= [\Phi_+]_{2,2} \Lambda_+ \exp(x\Lambda_+) \alpha_+ \\ &= [\Phi_+]_{2,2} \Lambda_+ [\Phi_+]_{2,2}^{-1} \hat{\mathbf{u}}_-(x) \end{aligned}$$

L'opérateur absorbant $\hat{\mathcal{S}}_+^{\mathbf{u}_h}$ dans ω^+ s'écrit donc :

$$\hat{\mathcal{S}}_+^{\mathbf{u}_h} = \begin{pmatrix} \frac{\nu\lambda_1(\lambda_5^2 - \eta^2)}{\eta^2 - \lambda_1\lambda_5} + u_0 & \frac{i\nu\eta\lambda_5(\lambda_5 - \lambda_1)}{\eta^2 - \lambda_1\lambda_5} & \frac{1}{Fr^2} \\ \frac{i\nu\eta\lambda_1(\lambda_5 - \lambda_1)}{\eta^2 - \lambda_1\lambda_5} & \frac{\nu\lambda_5(\lambda_1^2 - \eta^2)}{\eta^2 - \lambda_1\lambda_5} + u_0 & 0 \end{pmatrix}$$

Remarque : cas $u_0 < 0$

Le polynôme Q admet dans ce cas deux racines à parties réelles positives et une racine à partie réelle négative. On note λ_3 et λ_4 les racines à parties réelles positives et λ_5 la racine à partie réelle négative.

Dans ce cas, les racines que l'on conserve dans ω^+ sont λ_2 et λ_5 . Celles que l'on garde dans ω^- sont λ_1 , λ_3 et λ_4 .

On en déduit l'expression suivante de l'opérateur $\hat{\mathcal{S}}_-^{\bar{\mathbf{u}}_h}$:

$$\hat{\mathcal{S}}_-^{\bar{\mathbf{u}}_h} = \begin{pmatrix} \frac{\nu\lambda_2(\eta^2 - \lambda_5^2)}{\eta^2 - \lambda_2\lambda_5} - u_0 & \frac{i\nu\eta\lambda_5(\lambda_2 - \lambda_5)}{\eta^2 - \lambda_2\lambda_5} & -\frac{1}{Fr^2} \\ \frac{i\nu\eta\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_5)}{\eta^2 - \lambda_2\lambda_5} & \frac{\nu\lambda_5(\eta^2 - \lambda_2^2)}{\eta^2 - \lambda_2\lambda_5} - u_0 & 0 \end{pmatrix}$$

Quant à $\hat{\mathcal{S}}_+^{\mathbf{u}}$, il a la même expression analytique que celle de $-\hat{\mathcal{S}}_-^{\bar{\mathbf{u}}_h}$ vue dans le paragraphe précédent en remplaçant λ_2 par λ_1 .

Dans les deux cas étudiés, les deux opérateurs que l'on obtient sont non locaux en temps et en

espace. Ils sont donc inutilisables en pratique. Dans la suite on va proposer d'approcher $\hat{\mathcal{S}}_-^{\bar{U}_h}$ et $\hat{\mathcal{S}}_+^u$ par des expressions plus simples conduisant à des opérateurs locaux. Pour cela on va effectuer un développement de Taylor selon ε et en η afin d'avoir des polynômes en s et en $i\eta$.

7.3.3 Expressions approchées des opérateurs $\hat{\mathcal{S}}_-^{\bar{U}_h}$ et $\hat{\mathcal{S}}_+^u$

Développement asymptotique en ε

Dans un premier temps, on effectue un développement asymptotique en ε , afin de trouver des expressions approchées des opérateurs $\hat{\mathcal{S}}_-^{\bar{U}_h}$ et $\hat{\mathcal{S}}_+^u$.

Pour des raisons de simplicité on s'arrête à l'ordre 1, ce qui donne :

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{u_0}{\nu_0 \varepsilon} + \frac{s + i\eta v_0}{u_0} + O(\varepsilon) \\ \lambda_2 &= -\frac{s + i\eta v_0}{u_0} + O(\varepsilon) \\ \lambda_3 &= -\frac{a_1}{\varepsilon} + \frac{b_1 - 3a_1 a_2}{a_1} + O(\varepsilon) \\ \lambda_4 &= -\frac{3b_1 + \sqrt{9b_1^2 - 12a_1 c_1}}{6a_1} + O(\varepsilon) \\ \lambda_5 &= \frac{-3b_1 + \sqrt{9b_1^2 - 12a_1 c_1}}{6a_1} + O(\varepsilon)\end{aligned}$$

où $a_1 = \frac{1}{Fr^2} - u_0^2$, $a_2 = \frac{(s + i\eta v_0)}{3u_0}$, $b_1 = -\frac{2(s + i\eta v_0)}{3\nu_0}$ et $c_1 = -\frac{\eta^2}{Fr^2} + \frac{(s + i\eta v_0)^2}{u_0 \nu_0}$, cf (7.6).

La racine λ_1 a une partie réelle positive et dans la suite on fait l'hypothèse suivante :

Hypothèse : dans la suite on suppose que $a_1 = \frac{1}{3u_0 \nu_0} \left(\frac{1}{Fr^2} - u_0^2 \right)$ est positif, ce qui revient à $\frac{1}{Fr^2} > u_0^2$. Cela correspond à un régime fluvial.

Remarque : u_0 est ici une variable sans dimension. En effet, on a $u_0 = \tilde{u}_0 U_C$ (on a omis le signe \sim pour plus de clarté).

Ceci implique que λ_2 et λ_3 ont des parties réelles négatives et que λ_5 est à partie réelle positive. Il reste donc à déterminer le signe de la partie réelle de λ_4 .

Lemme 7.3. *La partie réelle de λ_4 est négative.*

Démonstration

Tout d'abord on réécrit c_1 de la façon suivante :

$$\begin{aligned}c_1 &= -\frac{\frac{\eta^2}{Fr^2} + (s + i\eta v_0)^2}{u_0 \nu_0} \\ &= -\frac{\eta^2}{Fr^2 u_0 \nu_0} - \frac{9\nu_0}{4u_0} b_1^2\end{aligned}$$

On peut donc réécrire le développement asymptotique de λ_4 de la façon suivante :

$$\lambda_4 = -\frac{3b_1 + \sqrt{\delta b_1^2 + \gamma}}{6a_1} + O(\varepsilon)$$

où $\delta = 9(1 + \frac{3a_1\nu_0}{u_0})$ et $\gamma = \frac{12a_1\eta^2}{u_0\nu_0 Fr^2}$. Tous les deux sont des réels positifs.

On note $C = \delta b_1^2 + \gamma$, $b_{1,1} = \Re(b_1)$ et $b_{1,2} = \Im(b_1)$. On a donc $\Re(C) = \delta(b_{1,1}^2 - b_{1,2}^2) + \gamma$ et $\Im(C) = 2\delta b_{1,1}b_{1,2}$.

Ensuite, on a :

$$\begin{aligned} \left[\Re(\sqrt{C}) \right]^2 &= \delta(b_{1,1}^2 - b_{1,2}^2) + \gamma + \sqrt{(\delta(b_{1,2}^2 - b_{1,2}^2) + \gamma)^2 + 4\delta^2 b_{1,1}^2 b_{1,2}^2} \\ &= \delta(b_{1,1}^2 - b_{1,2}^2) + \gamma + \\ &\quad \sqrt{\delta^2 b_{1,1}^4 + \delta^2 b_{1,2}^4 + \gamma^2 - 2\delta^2 b_{1,1}^2 b_{1,2}^2 + 2\delta\gamma b_{1,1}^2 - 2\delta\gamma b_{1,2}^2 + 4\delta^2 b_{1,1}^2 b_{1,2}^2} \\ &= \delta(b_{1,1}^2 - b_{1,2}^2) + \gamma + \sqrt{(-\delta b_{1,2}^2 + \gamma)^2 + \delta^2 b_{1,1}^4 + 2\delta\gamma b_{1,1}^2 + 2\delta^2 b_{1,1}^2 b_{1,2}^2} \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \left[\Re(\sqrt{C}) \right]^2 - \delta b_{1,1}^2 &= -\delta b_{1,2}^2 + \gamma + \sqrt{(-\delta b_{1,2}^2 + \gamma)^2 + \delta^2 b_{1,1}^4 + 2\delta\gamma b_{1,1}^2 + 2\delta^2 b_{1,1}^2 b_{1,2}^2} \\ &\geq -\delta b_{1,2}^2 + \gamma + |-\delta b_{1,2}^2 + \gamma| \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

D'où, en utilisant le fait que $\delta \geq 9$ (car $a_1 \geq 0$) :

$$\left[\Re(\sqrt{C}) \right]^2 \geq \delta b_{1,1}^2 \geq 9b_{1,1}^2$$

et donc :

$$|\Re(\sqrt{C})| \geq 3|b_{1,1}|$$

Par convention \sqrt{C} désigne la racine carrée à partie réelle positive, et comme la partie réelle de b_1 est négative, on en déduit que :

$$\Re(\sqrt{C}) + 3b_{1,1} \geq 0$$

D'où

$$\Re\left(-\frac{3b_1 + \sqrt{\delta b_1^2 + \gamma}}{6a_1}\right) \leq 0$$

□

Ceci implique que les racines que l'on garde dans Ω^+ sont λ_2 , λ_3 et λ_4 . Celles que l'on garde dans Ω^- sont λ_1 et λ_5 . On est donc dans le premier cas de figure décrit ci-dessus.

On en déduit donc les développements asymptotiques suivants :

- À l'ordre 1 en ε , l'opérateur $\hat{\mathcal{S}}_-^{\bar{\mathbf{U}}_h}$ s'écrit :

$$\hat{\mathcal{S}}_-^{\bar{\mathbf{U}}_h} = \begin{pmatrix} \frac{i\eta^2 u_0^2 - is^2 + 2\eta v_0 s + i\eta^2 v_0^2}{is\alpha_0 - \eta v_0 \alpha_0 - iu_0 \eta^2} & -\frac{\eta s u_0 + i\eta^2 u_0 v_0 - u_0^2 \eta \alpha_0}{is\alpha_0 - \eta v_0 \alpha_0 - iu_0 \eta^2} & \frac{(i\eta^2 u_0^2 - is^2 + 2\eta v_0 s + i\eta^2 v_0^2)u_0}{is\alpha_0 - \eta v_0 \alpha_0 - iu_0 \eta^2} \\ 0 & -u_0 & 0 \end{pmatrix} + O(\varepsilon)$$

où

$$\alpha_0 = \sqrt{-\eta^2 u_0^2 F r^2 + \eta^2 + s^2 F r^2 + 2is\eta v_0 F r^2 - \eta^2 v_0^2 F r^2}$$

et

- À l'ordre 1 en ε , l'opérateur $\hat{\mathcal{S}}_+^{\mathbf{u}}$ s'écrit :

$$\hat{\mathcal{S}}_+^{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} u_0 & 0 & \frac{1}{F r^2} \\ 0 & u_0 & 0 \end{pmatrix} + O(\varepsilon)$$

La transformée de Fourier-Laplace inverse de l'approximation de $\hat{\mathcal{S}}_+^{\mathbf{u}}$ est un opérateur local. Par contre celle de l'approximation de $\hat{\mathcal{S}}_-^{\bar{\mathbf{U}}_h}$ est encore non locale en temps et en espace. Un développement en ε est donc insuffisant. De ce fait, on va par la suite effectuer un développement asymptotique en ε et en η à l'ordre 1.

Développement asymptotique en ε et en η

Un développement asymptotique de l'opérateur $\hat{\mathcal{S}}_-^{\bar{\mathbf{U}}_h}$ en ε et en η donne :

$$\hat{\mathcal{S}}_-^{\bar{\mathbf{U}}_h} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{F r} & 0 & -\frac{u_0}{F r} \\ 0 & -u_0 & 0 \end{pmatrix} + O(\varepsilon, \eta)$$

7.3.4 Expression des opérateurs en variables dimensionnelles

En revenant dans les espaces réels, les développements précédents donnent les approximations suivantes (en variables adimensionnelles) des opérateurs $\mathcal{B}_-^{SVL,opt}$ et $\mathcal{B}_+^{SVL,opt}$:

$$\mathcal{B}_-^{SVL,opt}(\mathbf{u}, \zeta) = \begin{pmatrix} \nu \partial_x u - (u_0 - \frac{1}{F r})u - (\frac{1}{F r^2} - \frac{u_0}{F r})\zeta \\ \nu \partial_x v \end{pmatrix} + O(\varepsilon, \eta) \quad (7.9)$$

et

$$\mathcal{B}_+^{SVL,opt}(\bar{\mathbf{U}}_h, \zeta) = \begin{pmatrix} -\nu \partial_x \bar{U} \\ -\nu \partial_x \bar{V} \\ u_0 \zeta + \bar{U} \end{pmatrix} + O(\varepsilon, \eta) \quad (7.10)$$

En variables dimensionnelles cela donne :

$$\mathcal{B}_-^{SVL,opt}(\mathbf{u}, \zeta) = \begin{pmatrix} \mu \partial_x u - (u_0 - c)u - (c^2 - cu_0) \frac{\zeta}{h} \\ \mu \partial_x v \end{pmatrix} + O(\varepsilon, \eta) \quad (7.11)$$

et

$$\mathcal{B}_+^{SVL,opt}(\bar{\mathbf{U}}_h, \zeta) = \begin{pmatrix} -\mu \partial_x \bar{U} \\ -\mu \partial_x \bar{V} \\ u_0 \zeta + h \bar{U} \end{pmatrix} + O(\varepsilon, \eta) \quad (7.12)$$

On rappelle toutefois que l'approximation de $\mathcal{B}_-^{SVL,opt}$ requiert une hypothèse forte qui consiste à négliger η , c'est à dire les termes de dérivées en y .

7.4 Conditions de transmission optimales pour les modes baroclines

Dans ce qui suit on donne les expressions des opérateurs absorbants des modes baroclines. Comme on l'a déjà indiqué, ces modes n'interviennent pas dans le cadre du couplage des deux modèles étudiés, mais pourraient servir dans le cadre de décomposition de domaine classique des équations primitives 3-D.

Les modes baroclines sont indépendants de ζ . Les opérateurs absorbants correspondant à ces modes s'écrivent :

$$\mathcal{B}_-^{3D,n} = \nu \partial_x \mathbf{U}_h^n - u_0 \mathbf{U}_h^n - \mathcal{S}_-^{\mathbf{U}_h^n, n}$$

et

$$\mathcal{B}_+^{3D,n} = -\nu \partial_x \mathbf{U}_h^n + u_0 \mathbf{U}_h^n - \mathcal{S}_+^{\mathbf{U}_h^n, n}$$

Pour résoudre l'équation (7.3) il suffit de résoudre l'équation caractéristique associée. Dans ce cas une solution de (7.3) s'écrit sous la forme :

$$\hat{\mathbf{U}}_h^n = \alpha^n \exp(\lambda^{n,-} x) + \beta^n \exp(\lambda^{n,+} x)$$

où

$$\lambda^{n,-} = \frac{1}{2\nu} \left(u_0 - \sqrt{u_0^2 + 4\nu(\nu\eta^2 + \frac{\nu(n\pi)^2}{\varepsilon^2} + s + i\eta v_0)} \right)$$

et

$$\lambda^{n,+} = \frac{1}{2\nu} \left(u_0 + \sqrt{u_0^2 + 4\nu(\nu\eta^2 + \frac{\nu(n\pi)^2}{\varepsilon^2} + s + i\eta v_0)} \right)$$

On cherche des solutions qui décroissent à l'infini. Dans Ω^+ on garde la racine à partie réelle négative et inversement dans Ω^- . Une solution de (7.3) s'écrit alors :

$$\hat{\mathbf{U}}_h^{n,+} = \alpha^n \exp(\lambda^{n,-} x), \quad \text{et} \quad \hat{\mathbf{U}}_h^{n,-} = \beta^n \exp(\lambda^{n,+} x)$$

et donc

$$\partial_x \hat{\mathbf{U}}_h^{n,+} = \lambda^{n,-} \hat{\mathbf{U}}_h^{n,+}, \quad \text{et} \quad \partial_x \hat{\mathbf{U}}_h^{n,-} = \lambda^{n,+} \hat{\mathbf{U}}_h^{n,-}$$

Grâce à cela, on va pouvoir calculer les transformées de Laplace-Fourier des opérateurs $\hat{\mathcal{S}}_-^{\mathbf{U}_h^{n,n}}$ et $\hat{\mathcal{S}}_+^{\mathbf{U}_h^{n,n}}$. On a ainsi :

$$\hat{\mathcal{S}}_-^{\mathbf{U}_h^{n,n}} = (-\nu \lambda^{n,-} + u_0) Id \quad \text{et} \quad \hat{\mathcal{S}}_+^{\mathbf{U}_h^{n,n}} = (\nu \lambda^{n,+} - u_0) Id$$

En revanche, à cause de l'expression de $\lambda^{n,\pm}$, ces opérateurs sont non locaux en temps et en espace. Dans la suite, on cherche donc une approximation de ces opérateurs en effectuant un développement asymptotique en ε .

Lemme 7.4. *À l'ordre 2 en ε , les opérateurs $\hat{\mathcal{S}}_-^{\mathbf{U}_h^{n,n}}$ et $\hat{\mathcal{S}}_+^{\mathbf{U}_h^{n,n}}$ s'écrivent :*

$$\hat{\mathcal{S}}_-^{\mathbf{U}_h^{n,n}} = -\frac{u_0}{2} - \sqrt{u_0^2 + 4(n\pi)^2} - \frac{2\nu_0}{\sqrt{u_0^2 + 4(n\pi)^2}} (s + i\eta v_0 \nu_0) \varepsilon + O(\varepsilon^2) \quad (7.13)$$

et

$$\hat{\mathcal{S}}_+^{\mathbf{U}_h^{n,n}} = -\frac{u_0}{2} + \sqrt{u_0^2 + 4(n\pi)^2} + \frac{2\nu_0}{\sqrt{u_0^2 + 4(n\pi)^2}} (s + i\eta v_0 \nu_0) \varepsilon + O(\varepsilon^2) \quad (7.14)$$

Remarque : dans [1], l'analyse asymptotique est faite en supposant le nombre de Rossby petit. Dans ce cas, les auteurs obtiennent une approximation des opérateurs $\hat{\mathcal{S}}_-^{\mathbf{U}_h^{n,n}}$ et $\hat{\mathcal{S}}_+^{\mathbf{U}_h^{n,n}}$ indépendantes de n . Ce n'est pas le cas ici.

7.5 Sur le caractère bien posé des deux modèles

On va étudier brièvement le caractère bien posé des systèmes de Saint-Venant (6.1) et de Navier-Stokes hydrostatique (6.2) avec les opérateurs absorbants obtenus dans ce chapitre. On se contentera dans la suite de rappeler quelques résultats sur l'existence et l'unicité des solutions qu'on trouve par ailleurs dans [19] et dans [32].

Le système (6.2) se décompose en deux parties, barotrope et barocline. On doit donc considérer les deux types de problèmes aux limites suivants :

- Les systèmes (6.1) et (6.16) sont complétés respectivement sur γ par des conditions aux limites de type :

$$\begin{cases} \mu \partial_x u - \frac{u_0 - c}{c} (-cu + g\zeta) = g_1 \\ \mu \partial_x v = g_2 \end{cases} \quad (7.15)$$

où $c = \sqrt{gh}$, et

$$\begin{cases} -\mu \partial_x \bar{U} = \tilde{g}_1 \\ -\mu \partial_x \bar{V} = \tilde{g}_2 \\ u_0 \zeta + h \bar{U} = \tilde{g}_3 \end{cases} \quad (7.16)$$

Ces systèmes sont appelés aussi dans la littérature systèmes incomplètement paraboliques. On trouve dans [19] un théorème qui prouve le caractère bien posé des deux problèmes de Cauchy associés à (6.1) et (6.16) avec des conditions type (7.15) et (7.16) homogènes ($g_i = 0$ pour $i = 1, 2$ et $\tilde{g}_i = 0$ pour $1 \leq i \leq 3$). La démonstration se base sur les travaux de Strikwerda (voir [42]) où il est établi qu'un problème aux conditions initiales incomplètement parabolique est bien posé si et seulement si le problème purement parabolique et le problème hyperbolique réduit (voir [19] pour la définition) sont bien posés et si les conditions aux limites sont découplées, ce qui est le cas pour les conditions (7.15) et (7.16) homogènes. Il suffit ensuite d'introduire des relèvements vérifiant les mêmes conditions initiales que (6.1) et (6.2) et les mêmes conditions aux limites pour résoudre les deux systèmes de Saint-Venant avec les conditions aux limites non homogènes (7.15) et (7.16). Enfin, pour caractériser les espaces fonctionnels contenant les solutions de (6.1) et (6.16), on peut étudier les formulations variationnelles des systèmes (6.1) et (6.16) munis des conditions (7.15) et (7.16).

- Quant à la vitesse barocline, elle est solution du système (6.18) muni sur Γ de la condition aux limites suivante :

$$\nu \partial_x (\mathbf{U}_h - \overline{\mathbf{U}}_h) = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma \times \mathbb{R}^+$$

Cela donc revient à résoudre deux équations de convection-diffusion en dimension 3 de la forme $\partial_t w + \mathbf{b} \cdot \nabla w - \mu \Delta w = 0$ dans $\Omega^+ \times \mathbb{R}^+$, où $\mathbf{b} = (U_0, V_0, 0)^t$ avec les conditions aux limites \mathcal{B}_+^{ext} sur les bords extérieurs et des conditions de Neumann homogènes sur $\Gamma \times \mathbb{R}^+$. Pour démontrer l'existence et de l'unicité des deux solutions on peut se baser sur le cas 2-D étudié dans [32].

En résumé

On a abordé dans ce chapitre le calcul des opérateurs absorbants exacts et approchés du système de Saint-Venant ainsi que ceux des modes baroclines. On a donc utilisé les techniques usuelles consistant à trouver leur expression dans l'espace de Laplace-Fourier. En revanche et malgré une première approximation selon le rapport d'aspect ε , on n'a pas réussi à voir des expressions exploitables de ces opérateurs. On a donc été amené à négliger tous les termes en η , la variable de Fourier dans la direction y . Ceci revient à négliger tous les termes de dérivées en y dans l'espace réel. Pour cette raison, on propose dans le chapitre suivant d'étudier l'algorithme de couplage 6.1 avec des conditions aux limites de type Robin.

Chapitre 8

Algorithme de couplage avec des conditions de type « Robin »

Dans le chapitre 7, on a écrit sous leur forme générale les conditions aux limites permettant une convergence optimale de l'algorithme de couplage 6.1. En revanche, comme on l'a vu dans la section 7.3, pour pouvoir exploiter ces opérateurs il faut faire des approximations. Celles proposées au chapitre 7, basées sur des développements limités, nécessitent des hypothèses très restrictives pour aboutir à des opérateurs utilisables en pratique. Afin de tenter de contourner cette restriction, on propose dans ce chapitre d'étudier des conditions de type « Robin généralisées », c'est à dire basées sur les conditions de transmission physiques auxquelles on ajoute un opérateur λId . Le coefficient λ est alors un degré de liberté sur lequel on peut jouer pour accélérer la convergence. On va donc étudier dans ce chapitre l'algorithme de couplage 6.1 avec les conditions aux limites suivantes :

$$\mathcal{B}_-(\mathbf{u}, \zeta) = \begin{pmatrix} \mu \frac{\partial u}{\partial x} - g\zeta + (\lambda - \frac{1}{2}u_0)u \\ \mu \frac{\partial v}{\partial x} + (\lambda - \frac{1}{2}u_0)v \end{pmatrix} \quad (8.1)$$

et

$$\mathcal{B}_+(\mathbf{U}_h, \zeta) = \begin{pmatrix} -\mu \frac{\partial U}{\partial x} + g\zeta + (\lambda + \frac{1}{2}u_0)U \\ -\mu \frac{\partial V}{\partial x} + (\lambda + \frac{1}{2}u_0)V \\ u_0\zeta \end{pmatrix} \quad (8.2)$$

où λ est une constante strictement positive.

Remarque : on a imposé ici $u_0\zeta$ comme dernière composante du vecteur $\mathcal{B}_+(\mathbf{U}_h, \zeta)$ au lieu de $u_0\zeta + \bar{U}$ qui serait la quantité naturelle de transmission au vu de (6.14). De même on a considéré le terme $\frac{u_0}{2}\mathbf{u}$ (respectivement $\frac{u_0}{2}\mathbf{U}_h$) en lieu et place de $u_0\mathbf{u}$ (respectivement $u_0\mathbf{U}_h$) que l'on trouve pourtant dans (6.13). Ce choix est fait afin d'obtenir plus facilement la convergence de l'algorithme de décomposition usuel du système de Saint-Venant (voir section 8.3). On verra

aussi qu'à convergence, les contraintes physiques (6.13) et (6.14) sont vérifiées.

Dans la suite on décompose les trois composantes de l'opérateur \mathcal{B}_+ en deux parties :

$$\mathcal{B}_+^{\mathbf{u}}(\mathbf{U}_h, \zeta) = -\mu \frac{\partial \mathbf{U}_h}{\partial x} + g \begin{pmatrix} \zeta \\ 0 \end{pmatrix} + (\lambda + \frac{1}{2}u_0)\mathbf{U}_h \quad (8.3)$$

et

$$\mathcal{B}_+^{\zeta}(\mathbf{U}_h, \zeta) = u_0 \zeta \quad (8.4)$$

On remarque comme dans [32] qu'on a les deux relations suivantes :

$$\mathcal{B}_+^{\mathbf{u}}(\mathbf{U}_h, \zeta) + \mathcal{B}_-(\mathbf{U}_h, \zeta) = 2\lambda \mathbf{U}_h \quad (8.5)$$

$$\mathcal{B}_+^{\mathbf{u}}(\mathbf{U}_h, \zeta) - \mathcal{B}_-(\mathbf{U}_h, \zeta) = 2 \left(-\mu \frac{\partial \mathbf{U}_h}{\partial x} + \frac{1}{2}u_0 \mathbf{U}_h + g \begin{pmatrix} \zeta \\ 0 \end{pmatrix} \right) \quad (8.6)$$

Ces deux relations serviront dans les démonstrations qui seront faites plus loin.

Dans les prochaines sections, on commencera par prouver que le système de Saint-Venant 2D défini sur l'espace entier est bien posé. On étudiera aussi l'algorithme de Schwarz 6.1 muni des conditions aux limites (8.1) et (8.2) imposées respectivement sur γ et Γ . Ensuite, on prouvera la convergence de l'algorithme usuel de décomposition de domaine du système de Saint-Venant 2-D avec les conditions aux limites (8.1) et (8.3). Ceci permettra de conclure quant à la convergence de l'algorithme de couplage 6.1. Enfin, on finira par étudier rapidement l'optimisation de la convergence de l'algorithme de couplage en fonction de λ .

Pour simplifier l'étude de la convergence, on suppose dans la suite que l'on se place dans un domaine infini dans les directions x , y et à fond plat. On a donc $\Omega = \mathbb{R}^2 \times [-h, 0]$, $\omega = \mathbb{R}^2$, $\omega^- = \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}$ et $\omega^+ = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$. On notera T le temps final et on suppose que $0 < T \leq +\infty$.

8.1 Étude du système de Saint-Venant 2-D sur l'espace entier

Comme on l'a vu dans le chapitre 6, la convergence de l'algorithme de couplage 6.1 est équivalente à la convergence de l'algorithme de décomposition de domaine usuel du système de Saint-Venant 2-D. On commence donc par étudier l'existence et l'unicité de la solution de ce système.

On considère le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{U}_0 \cdot \nabla_h) \mathbf{u} + g \nabla_h \zeta - \mu \Delta_h \mathbf{u} = 0 & \text{dans } \omega \times [0, T] \quad (8.7a) \\ \partial_t \zeta + h \operatorname{div}_h(\mathbf{u}) + \mathbf{U}_0 \cdot \nabla_h \zeta = 0 & \text{dans } \omega \times [0, T] \quad (8.7b) \\ \mathbf{u}(., 0) = \overline{\mathbf{U}}^{ini} & \text{dans } \omega \quad (8.7c) \\ \zeta(., 0) = \zeta^{ini} & \text{dans } \omega \quad (8.7d) \end{array} \right.$$

On remarque que le sous-système d'équations (8.7a) et (8.7c) vérifié par \mathbf{u} est un système parabolique linéaire avec un terme source dépendant de ζ . Quant à l'inconnue ζ , elle vérifie une équation de transport linéaire avec un terme source dépendant de \mathbf{u} .

Dans la suite, on adopte la même démarche que celle utilisée dans [1] pour montrer l'existence et l'unicité d'une solution (\mathbf{u}, ζ) du système (8.7). On commence par étudier le problème parabolique à ζ fixé. Ensuite on s'intéresse à l'équation du transport à \mathbf{u} fixé. Enfin pour conclure, on applique le théorème du point fixe pour montrer l'existence de la solution du système de Saint-Venant 2-D dans l'espace entier.

8.1.1 Définition d'une solution faible

On commence par donner la définition de la notion de solution faible du système (8.7).

Définition 8.1. On suppose que $X^{ini} = (\overline{\mathbf{U}}^{ini}, \zeta^{ini}) \in L^2(\omega, \mathbb{R}^2) \times L^2(\omega)$. On appelle solution faible de (8.7) tout $X = (\mathbf{u}, \zeta) \in L^2(0, T; H^1(\omega, \mathbb{R}^2)) \times L^2(\omega \times (0, T))$ tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt}(\mathbf{u}, \mathbf{v})_\omega + ((\mathbf{U}_0 \cdot \nabla_h) \mathbf{u}, \mathbf{v})_\omega + \mu(\nabla_h \mathbf{u}, \nabla_h \mathbf{v})_\omega = -g(\nabla_h \zeta, \mathbf{v})_\omega \quad \forall \mathbf{v} \in H^1(\omega, \mathbb{R}^2) \\ \mathbf{u}(., 0) = \overline{\mathbf{U}}^{ini} \quad \text{dans } \omega \end{array} \right. \quad (8.8)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt}(\zeta, \chi)_\omega + (\mathbf{U}_0 \cdot \nabla_h \zeta, \chi)_\omega = -h(\operatorname{div}_h(\mathbf{u}), \chi)_\omega \quad \forall \chi \in L^2(\omega) \\ \zeta(., 0) = \zeta^{ini} \quad \text{dans } \omega \end{array} \right. \quad (8.9)$$

où $(., .)_\omega$ désigne le produit scalaire dans ω .

8.1.2 Système parabolique

Dans un premier temps, on étudie la solution du système parabolique (8.7a) et (8.7c), pour $\zeta \in L^2(\omega \times (0, T))$ donné.

Définition 8.2. Pour $\overline{\mathbf{U}}^{ini} \in L^2(\omega, \mathbb{R}^2)$, et $\zeta \in L^2(\omega \times (0, T))$, on appelle solution faible en vitesse de (8.7a), (8.7c) toute fonction $\mathbf{u} \in L^2(0, T; H^1(\omega, \mathbb{R}^2))$ vérifiant (8.8).

On a alors le résultat suivant :

Proposition 8.1. *Si $\bar{\mathbf{U}}^{ini} \in L^2(\omega, \mathbf{R}^2)$ et $\zeta \in L^2(\omega \times (0, T))$ alors il existe une unique solution faible en vitesse de (8.7a), (8.7c) appartenant à $C(0, T; L^2(\omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\omega, \mathbb{R}^2))$.*

Démonstration

On commence par montrer l'unicité de la solution. Pour cela, on établit l'inégalité d'énergie suivante :

$$\|\mathbf{u}\|_\omega^2 + \mu \int_0^t \|\nabla_h \mathbf{u}\|_\omega^2 \leq C \int_0^t \|\zeta\|_\omega^2 + \|\bar{\mathbf{U}}^{ini}\|_\omega^2, \forall t \in [0, T] \quad (8.10)$$

où C est une constante strictement positive.

En effectuant le produit scalaire L^2 dans ω de (8.7a) par \mathbf{u} et en intégrant par partie, on trouve :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{u}\|_\omega^2 + \mu \|\nabla_h \mathbf{u}\|_\omega^2 = g(\zeta, \operatorname{div}_h \mathbf{u})$$

Ensuite, on applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz au terme $g(\zeta, \operatorname{div}_h \mathbf{u})$ et on utilise le fait que $2ab \leq \alpha a^2 + \frac{b^2}{\alpha}$ pour tous $a, b, \alpha > 0$, ce qui donne :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{u}\|_\omega^2 + \mu \|\nabla_h \mathbf{u}\|_\omega^2 &\leq g \left(\frac{\alpha}{2} \|\zeta\|_\omega^2 + \frac{1}{2\alpha} \|\operatorname{div}_h(\mathbf{u})\|_\omega^2 \right) \\ &\leq g \left(\frac{\alpha}{2} \|\zeta\|_\omega^2 + \frac{1}{\alpha} \|\nabla_h \mathbf{u}\|_\omega^2 \right) \end{aligned}$$

En choisissant α tel que $\frac{2g}{\alpha} = \mu$, on trouve :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{u}\|_\omega^2 + \frac{\mu}{2} \|\nabla_h \mathbf{u}\|_\omega^2 \leq \frac{g^2}{\mu} \|\zeta\|_\omega^2$$

Enfin, l'intégration en temps sur $(0, t)$ pour $t > 0$ donne :

$$\frac{1}{2} \|\mathbf{u}\|_\omega^2 + \frac{\mu}{2} \int_0^t \|\nabla_h \mathbf{u}\|_\omega^2 \leq \frac{g^2}{\mu} \int_0^t \|\zeta\|_\omega^2 + \frac{1}{2} \|\bar{\mathbf{U}}^{ini}\|_\omega^2$$

On en déduit la relation (8.10).

Maintenant, si on se ramène au cas homogène avec des conditions initiales nulles, autrement dit $\zeta^{ini} = 0$ et $\bar{\mathbf{U}}^{ini} = 0$, alors il existe une unique solution du système (8.7a) dans l'espace $C(0, T; L^2(\omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\omega, \mathbb{R}^2))$.

Pour montrer l'existence d'une solution faible en vitesse on utilise la méthode de Galerkin dont on ne donne ici que les grandes lignes (voir [9] pour plus de détails). Cette méthode consiste à chercher d'abord une solution vérifiant (8.8) dans un espace de dimension finie. Ensuite, le passage à la limite permet de conclure quant à l'existence d'une solution de (8.7a), dans les espaces indiqués dans la proposition 8.1.

L'espace $H^1(\omega, \mathbb{R}^2)$ est un espace de Hilbert séparable. On en déduit qu'il existe une suite dénombrable de vecteurs $(\mathbf{v}_k)_{k \geq 1}$ tel que toute sous-famille finie est libre. Pour $N \geq 1$, on notera V_N l'espace engendré par $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N$. La réunion de ces espaces est alors dense dans

$H^1(\omega, \mathbb{R}^2)$.

Tout d'abord, comme $H^1(\omega, \mathbb{R}^2)$ est dense dans $L^2(\omega, \mathbb{R}^2)$, il existe une suite $(\mathbf{u}_N^{ini})_N$ appartenant à V_N pour tout $N \geq 1$ qui converge vers $\bar{\mathbf{U}}^{ini}$. On écrit dans ce cas $\mathbf{u}_N^{ini} = \sum_{k=1}^N \alpha_{k,N}^{ini} \mathbf{v}_k$. Ensuite, on commence par chercher une solution de (8.8) dans V_N qui s'écrit donc sous la forme $\mathbf{u}_N = \sum_{k=1}^N \alpha_{k,N} \mathbf{v}_k$. On a alors :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(\mathbf{u}_N, \mathbf{v}_k)_\omega + ((\mathbf{U}_0 \cdot \nabla_h) \mathbf{u}_N, \mathbf{v}_k)_\omega + \mu(\nabla_h \mathbf{u}_N, \nabla_h \mathbf{v}_k)_\omega + g(\nabla_h \zeta, \mathbf{v}_k)_\omega = 0 \\ \mathbf{u}_N(., 0) = \mathbf{u}_N^{ini} \end{cases} \quad (8.11)$$

Ce système est équivalent au système suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{A}_N \frac{d\boldsymbol{\alpha}_N}{dt} + \mathbf{B}_N \boldsymbol{\alpha}_N = \mathbf{F}_N \\ \boldsymbol{\alpha}_N(0) = \boldsymbol{\alpha}_N^{ini} \end{cases} \quad (8.12)$$

où les matrices carrées \mathbf{A}_N et \mathbf{B}_N de taille $N \times N$ sont définies par $(\mathbf{A}_N)_{k,j} = (\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_j)$ et $(\mathbf{B}_N)_{k,j} = ((\mathbf{U}_0 \cdot \nabla_h) \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_j) + \mu(\nabla_h \mathbf{v}_k, \nabla_h \mathbf{v}_j)$. Les vecteurs $\boldsymbol{\alpha}_N$, $\boldsymbol{\alpha}_N^{ini}$ et \mathbf{F}_N de taille N ont respectivement comme $k^{\text{ème}}$ composante $\alpha_{k,N}$, $\alpha_{k,N}^{ini}$ et $-g(\nabla_h \zeta, \mathbf{v}_k)$.

La famille $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N$ est libre, donc la matrice \mathbf{A}_N est inversible. Le système (8.12) admet donc une unique solution $\boldsymbol{\alpha}_N$. On en déduit que le système (8.11) admet une unique solution $\mathbf{u}_N \in C(0, T; V_N) \cap L^2(0, T; V_N)$.

Ensuite, on peut montrer que pour tout $N \geq 1$ \mathbf{u}_N vérifie l'estimation d'énergie (8.10). Ceci signifie que $(\mathbf{u}_N)_{N \geq 1}$ est bornée dans $C(0, T; L^2(\omega, \mathbb{R}^2)) \cap L^2(0, T; H^1(\omega, \mathbb{R}^2))$. D'où l'existence d'une sous-suite $(\mathbf{u}_p)_p$ qui converge au sens faible étoile dans $C(0, T; L^2(\omega, \mathbb{R}^2))$ et au sens faible dans $L^2(0, T; H^1(\omega, \mathbb{R}^2))$. En passant à la limite dans (8.11), on déduit que \mathbf{u}_p tend vers \mathbf{u} qui est solution de (8.8). \square

8.1.3 Équation de transport

On s'intéresse maintenant à l'inconnue ζ qui est solution de l'équation de transport linéaire (8.7b) (avec le terme source $-\text{div}_h(\mathbf{u})$) et qui vérifie la condition initiale (8.7d).

Comme pour le système parabolique, on commence par donner la définition de la solution faible de l'équation de transport.

Définition 8.3. Soit $\mathbf{u} \in L^2(0, T; H^1(\omega, \mathbb{R}^2))$ et $\zeta^{ini} \in L^2(\omega)$. On appelle solution faible en hauteur d'eau de (8.7b), (8.7d) toute fonction $\zeta \in L^2(\omega \times (0, T))$ vérifiant (8.9).

On a alors le résultat suivant qu'on trouve par ailleurs dans [1] :

Proposition 8.2. Soit $\mathbf{u} \in L^2(0, T; H^1(\omega, \mathbb{R}^2))$ fixé et $\zeta^{ini} \in L^2(\omega)$. Il existe alors une unique solution faible en hauteur d'eau $\zeta \in L^2(\omega \times (0, T))$ de (8.7b), (8.7d). Cette solution s'écrit grâce à la formule des caractéristiques sous la forme :

$$\zeta(x, y, t) = \zeta^{ini}(x - u_0 t, y - v_0 t) - h \int_0^t (\operatorname{div}_h \mathbf{u})(x - u_0 s, y - v_0 s, t - s) ds \quad (8.13)$$

Cela signifie aussi que $\zeta \in C(0, T; L^2(\omega))$.

Pour tout $t \in [0, T]$, cette solution vérifie l'inégalité d'énergie suivante :

$$\|\zeta\|_\omega \leq \|\zeta^{ini}\|_\omega + h \int_0^t \|\operatorname{div}_h(\mathbf{u})\|_\omega ds \quad (8.14)$$

Démonstration :

La démonstration se trouve dans [1]. On en donne ici seulement les grandes lignes.

Concernant l'existence, si ζ vérifie (8.13) et si $\operatorname{div}_h(\mathbf{u})$ et ζ^{ini} sont suffisamment réguliers alors ζ est solution de (8.7b), (8.7d).

Pour montrer l'unicité, on suppose que \mathbf{u} et ζ^{ini} sont nuls. D'après la formule caractéristique, la solution de (8.7b) est alors nulle. On en déduit l'unicité.

Maintenant, on montre l'estimation d'énergie (8.14). En effet, d'après la relation (8.13) on a :

$$\|\zeta\|_\omega \leq \|\zeta^{ini}\|_\omega + h \left\| \int_0^t \operatorname{div}_h(\mathbf{u}) ds \right\|_\omega$$

Ensuite on utilise le cas extrémal de l'inégalité de Hölder, à savoir que pour tout $f \in L^2(\omega)$, on a :

$$\|f\|_\omega = \max \left\{ \left| \int_\omega f g dx dy \right|, g \in L^2(\omega), \|g\|_\omega \leq 1 \right\}$$

Pour tout $g \in L^2(\omega)$ tel que $\|g\|_\omega \leq 1$, on a donc :

$$\begin{aligned} \left| \int_\omega \left(\int_0^t \operatorname{div}_h(\mathbf{u}) ds \right) g dx dy \right| &= \left| \int_0^t \left(\int_\omega \operatorname{div}_h(\mathbf{u}) g dx dy \right) ds \right| \\ &\leq \int_0^t \left| \int_\omega \operatorname{div}_h(\mathbf{u}) g dx dy \right| ds \\ &\leq \int_0^t \max_{\|g\|_\omega \leq 1} \left\{ \left| \int_\omega \operatorname{div}_h(\mathbf{u}) g dx dy \right| \right\} ds \\ &\leq \int_0^t \|\operatorname{div}_h(\mathbf{u})\|_\omega ds \end{aligned}$$

D'où

$$\left\| \int_0^t \operatorname{div}_h(\mathbf{u}) ds \right\|_\omega \leq \int_0^t \|\operatorname{div}_h(\mathbf{u})\|_\omega ds$$

On en déduit (8.14). □

8.1.4 Existence et unicité de la solution du système de Saint-Venant dans l'espace entier

Pour finir, on montre comme dans [1] l'existence et l'unicité de la solution du système (8.7) en utilisant le théorème du point fixe. On a alors le résultat suivant :

Proposition 8.3. *Pour tout $X^{ini} = (\bar{\mathbf{U}}^{ini}, \zeta^{ini}) \in L^2(\omega, \mathbb{R}^2) \times L^2(\omega)$ il existe une unique solution faible $X = (\mathbf{u}, \zeta)$ appartenant à $(C(0, T; L^2(\omega, \mathbb{R}^2)) \cap L^2(0, T; H^1(\omega, \mathbb{R}^2))) \times (L^2(\omega \times (0, T)) \cap C(0, T; L^2(\omega)))$ de (8.7).*

Démonstration :

Étant donnée la condition initiale X^{ini} , on définit les deux applications suivantes :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_1 : L^2(\omega \times (0, T)) \cap C(0, T; L^2(\omega)) &\longrightarrow C(0, T; L^2(\omega, \mathbb{R}^2)) \cap L^2(0, T; H^1(\omega, \mathbb{R}^2)) \\ \zeta &\longmapsto \mathbf{u} \text{ solution de (8.7a)} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_2 : C(0, T; L^2(\omega, \mathbb{R}^2)) \cap L^2(0, T; H^1(\omega, \mathbb{R}^2)) &\longrightarrow L^2(\omega \times (0, T)) \cap C(0, T; L^2(\omega)) \\ \mathbf{u} &\longmapsto \zeta \text{ solution de (8.7b)} \end{aligned}$$

On note dans la suite \mathcal{E}_T l'espace fonctionnel défini par :

$$\mathcal{E}_T = (C(0, T; L^2(\omega, \mathbb{R}^2)) \cap L^2(0, T; H^1(\omega, \mathbb{R}^2))) \times (L^2(\omega \times (0, T)) \cap C(0, T; L^2(\omega)))$$

Alors X est solution de (8.7) si et seulement si X est un point fixe de l'application :

$$\begin{aligned} \mathcal{T} : \mathcal{E}_T &\longrightarrow \mathcal{E}_T \\ (\mathbf{u}, \zeta) &\longmapsto (\mathcal{S}_1(\zeta), \mathcal{S}_2(\mathbf{u})) \end{aligned}$$

Il faut donc montrer l'existence d'un tel point fixe.

On considère pour cela $X_1, X_2 \in \mathcal{E}_T$. On note ensuite $(\mathbf{u}, \zeta) = (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2, \zeta_1 - \zeta_2) = X_1 - X_2$ et $(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\zeta}) = \mathcal{T}(X_1) - \mathcal{T}(X_2)$. Par linéarité, $\tilde{\mathbf{u}}$ vérifie le système parabolique (8.7a) avec une condition initiale de type (8.7c) nulle.

D'après l'inégalité d'énergie (8.10), pour tout $t \in [0, T]$, on a :

$$\|\tilde{\mathbf{u}}\|_\omega^2 + \mu \int_0^t \|\nabla_h \tilde{\mathbf{u}}\|_\omega^2 \leq C \int_0^t \|\zeta\|_\omega^2 \quad (8.15)$$

$$\leq Ct \sup_{s \in [0, t]} (\|\zeta\|_\omega^2(s)) \quad (8.16)$$

où $C > 0$.

De la même façon, d'après (8.14) et en utilisant l'inégalité de Cauchy Schwarz on a :

$$\|\tilde{\zeta}\|_\omega^2(t) \leq 2th \int_0^t \|\nabla_h \mathbf{u}\|_\omega^2(s) ds$$

Ceci signifie que pour $T' \in (0, T]$ assez petit, l'application \mathcal{T} est strictement contractante dans $\mathcal{E}_{T'}$.

Enfin, pour conclure, il suffit de réitérer le raisonnement sur les intervalles $[T', 2T']$, $[2T', 3T']$, etc. \square

8.2 Étude de l'algorithme de couplage

Maintenant, on étudie l'algorithme de couplage 6.1; on montre qu'il est bien défini en considérant les conditions aux bords (8.1), (8.3) et (8.4). Pour cela on prouve que chaque problème aux limites sur chaque sous-domaine est bien défini.

Pour $(\mathbf{U}_h)^0$ et ζ_+^0 donnés et pour tout $k \geq 0$, l'étude de l'algorithme de couplage 6.1 revient à l'étude des problèmes aux limites suivants sur chaque sous-domaine :

- Dans le domaine ω^- , on résout le système parabolique :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t \mathbf{u}^{k+1} + (\mathbf{U}_0 \cdot \nabla_h) \mathbf{u}^{k+1} - \mu \Delta_h \mathbf{u}^{k+1} = -g \nabla_h \zeta_-^{k+1} & \text{dans } \omega^- \times [0, T] \quad (8.17a) \\ \mathcal{B}_-(\mathbf{u}^{k+1}, \zeta_-^{k+1}) = \mathcal{B}_-(\bar{\mathbf{U}}_h^k, \zeta_+^k) & \text{sur } \gamma \times [0, T] \quad (8.17b) \\ \mathbf{u}^{k+1}(., 0) = \bar{\mathbf{U}}_-^{ini} & \text{dans } \omega^- \quad (8.17c) \end{array} \right.$$

et le problème de transport :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t \zeta_-^{k+1} + \mathbf{U}_0 \cdot \nabla_h \zeta_-^{k+1} = -h \operatorname{div}_h(\mathbf{u}^{k+1}) & \text{dans } \omega^- \times [0, T] \quad (8.18a) \\ \zeta_-^{k+1}(., 0) = \zeta_-^{ini} & \text{dans } \omega^- \quad (8.18b) \end{array} \right.$$

On rappelle ici qu'on n'a pas considéré de condition aux limites en $x = 0$ pour l'équation de transport dans ω^- car on a supposé $u_0 > 0$.

- Dans le domaine Ω^+ , on résout le système parabolique :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t \mathbf{U}_h^{k+1} + (\mathbf{U}_0 \cdot \nabla_h) \mathbf{U}_h^{k+1} - \mu \Delta_h \mathbf{U}_h^{k+1} = -g \nabla_h \zeta_+^{k+1} & \text{dans } \Omega^+ \times [0, T] \quad (8.19a) \\ \mu \partial_z \mathbf{U}_h = 0 & \text{en } z = 0 \quad (8.19b) \\ \mu \partial_z \mathbf{U}_h = 0 & \text{en } z = -h \quad (8.19c) \\ \mathcal{B}_+^{\mathbf{u}}(\mathbf{U}_h^{k+1}, \zeta_+^{k+1}) = \mathcal{B}_+^{\mathbf{u}}(\mathbf{u}^{k+1}, \zeta_-^{k+1}) & \text{sur } \Gamma \times [0, T] \quad (8.19d) \\ \mathbf{U}_h^{k+1}(., 0) = \mathbf{U}_+^{ini} & \text{dans } \Omega^+ \quad (8.19e) \end{array} \right.$$

et l'équation de transport :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t \zeta_+^{k+1} + \mathbf{U}_0 \cdot \nabla_h \zeta_+^{k+1} = -h \operatorname{div}_h(\bar{\mathbf{U}}_h^{k+1}) & \text{dans } \omega^+ \times [0, T] \quad (8.20a) \\ \mathcal{B}_+^{\zeta}(\mathbf{U}_h^{k+1}, \zeta_+^{k+1}) = \mathcal{B}_+^{\zeta}(\mathbf{u}^{k+1}, \zeta_-^{k+1}) & \text{sur } \gamma \times [0, T] \quad (8.20b) \\ \zeta_+^{k+1}(., 0) = \zeta_+^{ini} & \text{dans } \omega^+ \quad (8.20c) \end{array} \right.$$

Pour montrer que l'algorithme est bien défini, on procède comme dans la section précédente. On étudie les deux problèmes paraboliques, les deux équations de transport et enfin pour conclure on utilise le théorème du point fixe pour prouver l'existence et l'unicité de la solution sur chaque sous-domaine et pour toute itération de Schwarz. Dans la suite k désigne un entier positif.

8.2.1 Problèmes paraboliques dans chaque sous-domaine

Comme dans le cas du système de Saint-Venant défini dans le domaine entier, on cherche ici des solutions \mathbf{u}^{k+1} et \mathbf{U}_h^{k+1} respectivement dans $C(0, T, L^2(\omega^-, \mathbb{R}^2)) \cap L^2(0, T, H^1(\omega^-, \mathbb{R}^2))$ et dans $C(0, T, L^2(\Omega^+, \mathbb{R}^2)) \cap L^2(0, T, H^1(\Omega^+, \mathbb{R}^2))$. On suppose donc que $\bar{\mathbf{U}}_-^{ini} \in L^2(\omega^-, \mathbb{R}^2)$, $\mathbf{U}_+^{ini} \in L^2(\Omega^+, \mathbb{R}^2)$, $\zeta_-^{ini} \in L^2(\omega^-)$ et $\zeta_+^{ini} \in L^2(\omega^+)$. On commence par définir la notion de solution faible des systèmes (8.17) et (8.19) qui est plus délicate ici à cause des termes de bords sur γ et Γ (voir [1]).

On regarde par exemple le système parabolique dans ω^- . Le produit scalaire dans $L^2(\omega^-)$ de (8.17a) par $\mathbf{v} \in H^1(\omega^-, \mathbb{R}^2)$, après intégration par parties, donne :

$$\begin{aligned} & \int_{\omega^-} \partial_t \mathbf{u}^{k+1} \cdot \mathbf{v} + \int_{\omega^-} (\mathbf{U}_0 \cdot \nabla_h) \mathbf{u}^{k+1} \cdot \mathbf{v} + \mu \int_{\omega^-} \nabla_h \mathbf{u}^{k+1} : \nabla_h \mathbf{v} \\ & - \mu \int_{\gamma} \partial_x \mathbf{u}^{k+1} \cdot \mathbf{v} - g \int_{\omega^-} \zeta_-^{k+1} \operatorname{div}_h(\mathbf{v}) + g \int_{\gamma} \begin{pmatrix} \zeta_-^{k+1} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{v} = 0 \end{aligned}$$

D'après la condition aux limites (8.17b), on a :

$$\begin{aligned} & \int_{\omega^-} \partial_t \mathbf{u}^{k+1} \cdot \mathbf{v} + \int_{\omega^-} (\mathbf{U}_0 \cdot \nabla_h) \mathbf{u}^{k+1} \cdot \mathbf{v} + \mu \int_{\omega^-} \nabla_h \mathbf{u}^{k+1} : \nabla_h \mathbf{v} \\ & - \int_{\gamma} \mathcal{B}_- \left(\bar{\mathbf{U}}_h^k, \zeta_+^k \right) \cdot \mathbf{v} + \int_{\gamma} \left(\lambda - \frac{u_0}{2} \right) \mathbf{u}^{k+1} \cdot \mathbf{v} - g \int_{\omega^-} \zeta_-^{k+1} \operatorname{div}_h(\mathbf{v}) = 0 \end{aligned}$$

Pour que cette formulation soit bien définie, il faut que le terme $\mathcal{B}_- \left(\bar{\mathbf{U}}_h^k, \zeta_+^k \right)$ soit suffisamment régulier. Ce n'est pas le cas en choisissant $\mathbf{U}_h^k \in L^2(0, T, H^1(\Omega^+, \mathbb{R}^2))$. En effet, ceci implique que $\partial_x \mathbf{U}_h^k \in L^2(\Omega^+ \times [0, T])$ et donc on ne peut a priori pas définir la trace de $\partial_x \bar{\mathbf{U}}_h^k$ sur γ . Comme dans [1], on remédie à ce problème en définissant ce terme de bord par récurrence sur k . En effet, d'après la relation (8.5), on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_-(\mathbf{u}^{k+1}, \zeta_-^{k+1}) &= \mathcal{B}_-(\bar{\mathbf{U}}_h^k, \zeta_+^k) \\ &= -\mathcal{B}_+^u(\bar{\mathbf{U}}_h^k, \zeta_+^k) + 2\lambda \bar{\mathbf{U}}_h^k \end{aligned}$$

De la même façon, le terme au bord $\mathcal{B}_+(\mathbf{U}_h^{k+1}, \zeta_+^{k+1})$ peut être défini par récurrence grâce à la relation (8.5) :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_+^u(\mathbf{U}_h^{k+1}, \zeta_+^{k+1}) &= \mathcal{B}_+^u(\mathbf{u}^{k+1}, \zeta_-^{k+1}) \\ &= -\mathcal{B}_-(\mathbf{u}^{k+1}, \zeta_-^{k+1}) + 2\lambda \mathbf{u}^{k+1} \end{aligned}$$

Pour alléger les notations, on note dans la suite $\mathcal{B}_-^{k+1} = \mathcal{B}_-(\mathbf{u}^{k+1}, \zeta_-^{k+1})$, $\mathcal{B}_+^{k+1} = \mathcal{B}_+^{\mathbf{u}}(\mathbf{u}^{k+1}, \zeta_+^{k+1})$ et $\bar{\mathcal{B}}_+^{k+1} = \mathcal{B}_+^{\mathbf{u}}(\bar{\mathbf{U}}_h^{k+1}, \zeta_+^{k+1})$. On a alors les relations de récurrence suivantes :

$$\begin{cases} \mathcal{B}_-^{k+1} = -\bar{\mathcal{B}}_+^k + 2\lambda \bar{\mathbf{U}}_h^k \\ \mathcal{B}_+^{k+1} = -\mathcal{B}_-^{k+1} + 2\lambda \mathbf{u}^{k+1} \end{cases}$$

On définit aussi \mathcal{W}_γ l'espace $H^{\frac{1}{2}}(\gamma, \mathbb{R}^2)$ et \mathcal{W}_Γ l'espace $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma, \mathbb{R}^2)$ ainsi que \mathcal{W}'_γ et \mathcal{W}'_Γ leurs duaux.

Définition 8.4. On suppose connues $\zeta_-^{k+1} \in L^2(\omega^- \times (0, T))$ et $\zeta_+^{k+1} \in L^2(\omega^+ \times (0, T))$. Les formulations faibles de (8.17) et (8.19) sont définies de la façon suivante :

- Pour $k = 0$, on considère $\bar{\mathcal{B}}_+^0 \in L^2(0, T, \mathcal{W}'_\gamma)$.
- Pour $k \geq 0$, \mathcal{B}_-^{k+1} est défini par :

$$\mathcal{B}_-^{k+1} = -\bar{\mathcal{B}}_+^k + 2\lambda \bar{\mathbf{U}}_h^k \quad (8.21)$$

On dit que \mathbf{u}^{k+1} est solution faible en vitesse de (8.17) si et seulement si pour tout $\mathbf{v} \in H^1(\omega^-, \mathbb{R}^2)$, on a :

$$\begin{aligned} & \int_{\omega^-} \partial_t \mathbf{u}^{k+1} \cdot \mathbf{v} + \int_{\omega^-} (\mathbf{U}_0 \cdot \nabla_h) \mathbf{u}^{k+1} \cdot \mathbf{v} + \mu \int_{\omega^-} \nabla_h \mathbf{u}^{k+1} : \nabla_h \mathbf{v} \\ & + \int_\gamma \bar{\mathcal{B}}_+^k \cdot \mathbf{v} - \int_\gamma 2\lambda \bar{\mathbf{U}}_h^k \cdot \mathbf{v} + \int_\gamma (\lambda - \frac{u_0}{2}) \mathbf{u}^{k+1} \cdot \mathbf{v} - g \int_{\omega^-} \zeta_-^{k+1} \operatorname{div}_h(\mathbf{v}) = 0 \end{aligned} \quad (8.22)$$

- Une fois \mathbf{u}^{k+1} connu, on définit $\mathcal{B}_+(\mathbf{U}_h^{k+1}, \zeta_+^{k+1})$ par :

$$\mathcal{B}_+^{k+1} = -\mathcal{B}_-^{k+1} + 2\lambda \mathbf{u}^{k+1} \quad (8.23)$$

On dit que \mathbf{U}_h^{k+1} est solution faible en vitesse de (8.19) si et seulement si pour tout $\mathbf{V} \in H^1(\Omega^+, \mathbb{R}^2)$, on a :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^+} \partial_t \mathbf{U}_h^{k+1} \cdot \mathbf{V} + \int_{\Omega^+} (\mathbf{U}_0 \cdot \nabla_h) \mathbf{U}_h^{k+1} \cdot \mathbf{V} + \mu \int_{\Omega^+} \nabla_h \mathbf{U}_h^{k+1} : \nabla_h \mathbf{V} + \mu \int_{\Omega^+} \partial_z \mathbf{U}_h^{k+1} \cdot \partial_z \mathbf{V} \\ & + \int_\Gamma \mathcal{B}_-^{k+1} \cdot \mathbf{V} - \int_\Gamma 2\lambda \mathbf{u}^{k+1} \cdot \mathbf{V} + \int_\Gamma (\lambda + \frac{u_0}{2}) \mathbf{U}_h^{k+1} \cdot \mathbf{V} - g \int_{\omega^-} \zeta_+^{k+1} \operatorname{div}_h(\mathbf{V}) = 0 \end{aligned} \quad (8.24)$$

On a alors le résultat suivant :

Proposition 8.4. Soient $\mathbf{U}_+^{ini} \in L^2(\Omega^+, \mathbb{R}^2)$, $\bar{\mathbf{U}}_-^{ini} \in L^2(\omega^-, \mathbb{R}^2)$, $\mathcal{B}_-^{k+1} \in L^2(0, T, \mathcal{W}'_\gamma)$ et $\mathcal{B}_+^{k+1} \in L^2(0, T, \mathcal{W}'_\Gamma)$. On suppose que $\zeta_-^{k+1} \in L^2(\omega^- \times [0, T]) \cap C(0, T; L^2(\omega^-))$ et $\zeta_+^{k+1} \in L^2(\omega^+ \times (0, T)) \cap C(0, T; L^2(\omega))^+$. Il existe alors :

- une unique solution \mathbf{u}^{k+1} de (8.17) appartenant à $C(0, T, L^2(\omega^-, \mathbb{R}^2)) \cap L^2(0, T, H^1(\omega^-, \mathbb{R}^2))$,
- une unique solution \mathbf{U}_h^{k+1} de (8.19) appartenant à $C(0, T, L^2(\Omega^+, \mathbb{R}^2)) \cap L^2(0, T, H^1(\Omega^+, \mathbb{R}^2))$.

On a de plus les estimations d'énergie suivantes :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}^{k+1}\|_{\omega^-}^2 + \mu \int_0^t \|\nabla_h \mathbf{u}^{k+1}\|_{\omega^-}^2 + \int_0^t \int_\gamma \lambda \|\mathbf{u}^{k+1}\|^2 &\leq \|\bar{\mathbf{U}}_-^{ini}\|_{\omega^-}^2 + C_1 \int_0^t \|\zeta_-^{k+1}\|_{\omega^-}^2 \\ &+ C_2 \int_0^t \|\bar{\mathbf{B}}_+^k\|_\gamma^2 + C_3 \int_0^t \|\bar{\mathbf{U}}_h^k\|_\gamma^2 \end{aligned} \quad (8.25)$$

et

$$\begin{aligned} \|\mathbf{U}_h^{k+1}\|_{\Omega^+}^2 + \mu \int_0^t \|\nabla_h \mathbf{U}_h^{k+1}\|_{\Omega^+}^2 + \int_0^t \int_\Gamma \lambda \|\mathbf{U}_h^{k+1}\|^2 &\leq \|\mathbf{U}_+^{ini}\|_{\Omega^+}^2 + C'_1 \int_0^t \|\zeta_+^{k+1}\|_{\Omega^+}^2 \\ &+ C'_2 \int_0^t \|\bar{\mathbf{B}}_-^{k+1}\|_\Gamma^2 + C'_3 \int_0^t \|\mathbf{u}^{k+1}\|_\Gamma^2 \end{aligned} \quad (8.26)$$

où $C_1, C_2, C_3, C'_1, C'_2$ et C'_3 désignent des constantes positives.

Démonstration

La démonstration est identique à celle de la proposition 8.1 et repose sur la méthode de Galerkin. Pour obtenir les estimations d'énergies (8.25) et (8.26), il suffit de remplacer \mathbf{v} et \mathbf{V} respectivement dans (8.22) et (8.24) par \mathbf{u}^{k+1} et \mathbf{U}_h^{k+1} , de voir que $\int_{\omega^-} (\mathbf{U}_0 \cdot \nabla_h) \mathbf{u}^{k+1} \cdot \mathbf{u}^{k+1} = \frac{u_0}{2} \int_\gamma \|\mathbf{u}^{k+1}\|^2$ et que $\int_{\Omega^+} (\mathbf{U}_0 \cdot \nabla_h) \mathbf{U}_h^{k+1} \cdot \mathbf{U}_h^{k+1} = -\frac{u_0}{2} \int_\Gamma \|\mathbf{U}_h^{k+1}\|^2$ et d'utiliser ensuite l'identité $ab \leq \frac{\alpha}{2} a^2 + \frac{1}{2\alpha} b^2$ pour tous a, b et pour tout $\alpha > 0$. Enfin, pour finir il suffit d'intégrer entre 0 et t .

8.2.2 Équations de transport

On étudie maintenant les équations de transport (8.18) et (8.20).

Équation de transport dans le domaine ω^-

L'étude de l'équation (8.18) est semblable à celle de (8.7b). On va définir la solution faible de cette équation comme suit :

Définition 8.5. Soit $\mathbf{u}^{k+1} \in L^2(0, T; H^1(\omega^-, \mathbb{R}^2))$ fixé et $\zeta_-^{ini} \in L^2(\omega^-)$. La fonction $\zeta_-^{k+1} \in L^2(\omega^- \times (0, T))$ est solution faible en hauteur d'eau du système (8.18a) et (8.18b) si et seulement si on a :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} (\zeta_-^{k+1}, \chi)_{\omega^-} - (\zeta_-^{k+1}, \mathbf{U}_0 \cdot \nabla_h \chi)_{\omega^-} = -h(\text{div}_h(\mathbf{u}^{k+1}), \chi)_{\omega^-} & \forall \chi \in \mathcal{D}(\omega^-) \\ \zeta_-^{k+1}(\cdot, 0) = \zeta_-^{ini} & \text{dans } \omega^- \end{cases} \quad (8.27)$$

Là aussi on a le résultat suivant :

Proposition 8.5. Soit $\mathbf{u}^{k+1} \in L^2(0, T; H^1(\omega^-, \mathbb{R}^2))$ et $\zeta_-^{ini} \in L^2(\omega^-)$. Alors il existe une unique solution $\zeta_-^{k+1} \in L^2(\omega^- \times [0, T])$ de (8.18a), (8.18b). Cette solution s'écrit grâce à la méthode des caractéristiques sous la forme :

$$\zeta_-^{k+1}(x, y, t) = \zeta_-^{ini}(x - u_0 t, y - v_0 t) - h \int_0^t \left(\operatorname{div}_h \mathbf{u}^{k+1} \right) (x - u_0 s, y - v_0 s, t - s) ds \quad (8.28)$$

Cette solution appartient aussi à $C(0, T; L^2(\omega^-)) \cap C((-\infty, 0]_x; L^2(\mathbb{R}_y \times (0, T)))$.

Pour tout $x \leq 0$ et pour tout $t \in [0, T]$, cette solution vérifie l'inégalité d'énergie suivante :

$$\|\zeta_-^{k+1}\|_{\omega^-} \leq \|\zeta_-^{ini}\|_{\omega^-} + h \int_0^t \|\operatorname{div}_h(\mathbf{u}^{k+1})\|_{\omega^-} ds \quad (8.29)$$

Démonstration :

La démonstration est identique à celle de la proposition 8.2. □

Une fois que la solution de l'équation de transport (8.18) est connue, à l'itération $k + 1$ on peut définir la condition aux limites (8.20b) que l'on va imposer pour l'équation de transport dans le domaine ω^+ :

$$\mathcal{B}_+^\zeta \left(\mathbf{U}_h^{k+1}, \zeta_+^{k+1} \right) = u_0 \zeta_+^{k+1}(0, \cdot) = u_0 \zeta_-^{k+1}(0, \cdot) \quad (8.30)$$

On note dans la suite $\zeta_b^{k+1} = \zeta_+^{k+1}(0, \cdot)$

Équation de transport dans le domaine ω^+

La définition de la solution faible de (8.20) est un peu différente du fait que l'on considère une caractéristique entrante.

Définition 8.6. Soit $\mathbf{U}_h^{k+1} \in L^2(0, T; L^2(\omega^+, \mathbb{R}^2))$ et $\zeta_+^{ini} \in L^2(\omega^+)$.

On suppose que $\zeta_b^{k+1} \in L^2(\gamma \times (0, T))$. La fonction ζ_+^{k+1} est solution faible en hauteur d'eau du système (8.20) si et seulement si $\forall \chi \in \mathcal{D}(\bar{\omega}^+)$ on a :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(\zeta_+^{k+1}, \chi)_{\omega^+} - (\zeta_+^{k+1}, \mathbf{U}_0 \cdot \nabla_h \chi)_{\omega^+} - (U_0 \zeta_b^{k+1}, \chi)_\gamma = -h(\operatorname{div}_h(\bar{\mathbf{U}}_h^{k+1}), \chi)_{\omega^+} \\ \zeta_+^{k+1}(\cdot, 0) = \zeta_+^{ini} \quad \text{dans } \omega^+ \end{cases} \quad (8.31)$$

On a alors le résultat suivant :

Proposition 8.6. Soit $\mathbf{U}_h^{k+1} \in L^2(0, T, H^1(\omega^+, \mathbb{R}^2))$ donné et $\zeta_+^{ini} \in L^2(\omega^+)$. Alors il existe une unique solution $\zeta_+^{k+1} \in L^2(\omega^+ \times (0, T))$ de (8.20a), (8.20b) et (8.20c). Cette solution s'écrit grâce à la méthode des caractéristiques sous la forme :

- Si $x > u_0 t$:

$$\zeta_+^{k+1}(x, y, t) = \zeta_+^{ini}(x - u_0 t, y - v_0 t) - h \int_0^t \left(\operatorname{div}_h(\bar{\mathbf{U}}_h^{k+1}) \right) (x - u_0 s, y - v_0 s, t - s) ds \quad (8.32)$$

- Si $x \leq u_0 t$

$$\zeta_+^{k+1}(x, y, t) = \zeta_b^{k+1}\left(Y - \frac{v_0}{u_0}x, t - \frac{x}{u_0}\right) - h \int_0^{\frac{x}{u_0}} \left(\operatorname{div}_h \bar{\mathbf{U}}_h^{k+1} \right) (x - u_0 s, y - v_0 s, t - s) ds \quad (8.33)$$

Cette solution appartient aussi à l'espace $C(0, T; L^2(\omega^+)) \cap C([0, +\infty)_x; L^2(\mathbb{R}_y \times (0, T)))$.
 Pour tout $x \geq 0$ et pour tout $t \in [0, T]$, cette solution vérifie l'inégalité d'énergie suivante :

$$\|\zeta_+^{k+1}\|_{\omega^+} \leq \|\zeta_+^{ini}\|_{\omega^+} + u_0 \|\zeta_b^{k+1}\|_{\gamma \times (0, t)} + h \int_0^t \|\operatorname{div}_h(\bar{\mathbf{U}}_h^{k+1})\|_{\omega^-} ds \quad (8.34)$$

Démonstration :

Les relations (8.32) et (8.33) sont obtenues grâce à la méthode des caractéristiques (voir par exemple [18]). Pour montrer (8.34), on note $\omega_1^+ = \omega^+ \cap \{x \leq u_0 t\}$ et $\omega_2^+ = \omega^+ \cap \{x > u_0 t\}$. Ce qui donne

$$\|\zeta_+^{k+1}\|_{\omega^+} = \|\zeta_+^{k+1}\|_{\omega_1^+} + \|\zeta_+^{k+1}\|_{\omega_2^+}$$

Ensuite, d'après la relation (8.33), on a :

$$\|\zeta_+^{k+1}\|_{\omega_1^+} \leq \left(\int_{x \leq u_0 t} \int_{\mathbb{R}} (\zeta_b^{k+1}(y - \frac{v_0}{u_0} x, t - \frac{x}{u_0}))^2 dx dy \right)^{\frac{1}{2}} + h \int_0^t \|\operatorname{div}_h(\bar{\mathbf{U}}_h^{k+1})\|_{\omega_1^+}$$

En effectuant les changements de variables $Y = y - \frac{v_0}{u_0} x$ et $s = t - \frac{x}{u_0}$ dans la première intégrale du terme de droite, on trouve :

$$\begin{aligned} \left(\int_{x \leq u_0 t} \int_{\mathbb{R}} (\zeta_b^{k+1}(y - \frac{v_0}{u_0} x, t - \frac{x}{u_0}))^2 dx dy \right)^{\frac{1}{2}} &= u_0 \left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}} (\zeta_b^{k+1}(Y, s))^2 ds dY \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= u_0 \|\zeta_b^{k+1}\|_{\gamma \times [0, t]} \end{aligned}$$

De même, en effectuant un changement de variable $X = x - u_0 t$ on a :

$$\|\zeta_+^{ini}\|_{\omega_2^+} = \|\zeta_+^{ini}\|_{\omega^+}$$

D'où l'inégalité (8.34). □

8.2.3 L'algorithme de Schwarz est bien défini

Pour conclure, on montre que l'algorithme de couplage 6.1 est bien défini en utilisant les conditions aux limites (8.1), (8.3) et (8.4). Cela signifie qu'en partant de \mathcal{B}_+^0 donné et de ζ_+^0 donnée, on est capable de construire deux suites $X_-^k = (\mathbf{u}^k, \zeta_-^k)$ et $X_+^k = (\mathbf{U}_h^k, \zeta_+^k)$ qui sont bien définies et qui vérifient respectivement les formulations faibles (8.22), (8.27) et (8.24), (8.31).

Définition 8.7. La notion de solution faible de l'algorithme de couplage 6.1 est définie de la façon suivante :

- Soient $\zeta_+^0(0, \cdot) \in L^2(\gamma_T)$ et $\mathcal{B}_+^0 \in L^2(0, T; \mathcal{W}'_T)$ donnés.
- Pour $k \geq 1$, X_-^k et X_+^k sont solutions faibles de (8.17), (8.18) et de (8.19), (8.20) si et seulement si \mathbf{u}^k est solution de (8.22), ζ_-^k est solution de (8.27), \mathbf{U}_h^k est solution de (8.24) et ζ_+^k est solution de (8.31).
- À l'étape $k + 1$, les conditions aux limites sont définies par (8.21), (8.23) et (8.30).

Comme dans le cas du système de Saint-Venant défini dans l'espace entier, on finit par donner le résultat suivant qui se démontre grâce au théorème du point fixe :

Proposition 8.7. *Pour tout $X_-^{ini} = (\bar{\mathbf{U}}_-, \zeta_-^{ini}) \in L^2(\omega^-, \mathbb{R}^2) \times L^2(\omega^-)$, pour tout $X_+^{ini} = (\mathbf{U}_+, \zeta_+^{ini}) \in L^2(\Omega^+, \mathbb{R}^2) \times L^2(\omega^+)$, pour tout $\zeta_+^0(0, \cdot) \in L^2(\gamma_T)$ et pour tout $B_+^0 \in L^2(0, T; \mathcal{W}'_T)$ il existe :*

- *une unique solution X_-^{k+1} de (8.17), (8.18) telle que :*

$$X_-^{k+1} \in (C(0, T; L^2(\omega^-, \mathbb{R}^2)) \cap L^2(0, T; H^1(\omega^-, \mathbb{R}^2))) \times (L^2(\omega^- \times (0, T)) \cap C(0, T; L^2(\omega^-)))$$
- *une unique solution X_+^{k+1} de (8.19), (8.20) telle que :*

$$X_+^{k+1} \in (C(0, T; L^2(\Omega^+, \mathbb{R}^2)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega^+, \mathbb{R}^2))) \times (L^2(\omega^+ \times (0, T)) \cap C(0, T; L^2(\omega^+)))$$

Démonstration

La démonstration de cette proposition est identique à celle de la proposition 8.3 et se base sur le théorème du point fixe et sur les inégalités (8.25), (8.29), (8.26) et (8.34). \square

On vient donc de démontrer dans ce paragraphe que chaque étape de l'algorithme de couplage est bien posée. Reste maintenant à étudier sa convergence.

8.3 Convergence de l'algorithme de décomposition de domaine du système de Saint-Venant et de l'algorithme de couplage avec des conditions de type Robin

Grâce au lemme 6.3, on sait que la convergence de l'algorithme de couplage avec les conditions aux limites (8.1), (8.3) et (8.4) est équivalente à la convergence de l'algorithme usuel de décomposition de domaine du système de Saint-Venant 2-D muni des conditions (8.1), (8.3) et (8.4).

8.3.1 Convergence de l'algorithme usuel de décomposition de domaine du système de Saint-Venant

On s'intéresse dans un premier temps à l'étude de l'algorithme suivant :

Initialisation : \mathbf{u}_+^0 et ζ_+^0 donnés

À l'étape k ($k \geq 0$), résoudre :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}_{SVL}(\mathbf{u}_-^{k+1}, \zeta_-^{k+1}) = 0 \quad \text{dans } \omega^- \times [0, T] \\ \mathcal{B}_-^{ext}(\mathbf{u}_-^{k+1}, \zeta_-^{k+1}) = G_-^{ext} \quad \text{sur } \partial\omega_{ext}^- \times [0, T] \\ \mathcal{B}_-(\mathbf{u}_-^{k+1}, \zeta_-^{k+1}) = \mathcal{B}_-(\mathbf{u}_+^k, \zeta_+^k) \quad \text{sur } \gamma \times [0, T] \\ \mathbf{u}_-^{k+1}(., 0) = \bar{\mathbf{U}}_-^{ini} \quad \text{dans } \omega^- \quad \text{et} \quad \zeta_-^{k+1}(., 0) = \zeta_-^{ini} \quad \text{dans } \omega^- \end{array} \right.$$

puis

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}_{SVL}(\mathbf{u}_+^{k+1}, \zeta_+^{k+1}) = 0 \quad \text{dans } \omega^+ \times [0, T] \\ \mathcal{B}_+^{ext}(\mathbf{u}_+^{k+1}, \zeta_+^{k+1}) = \bar{G}_+^{ext} \quad \text{sur } \partial\omega_{ext}^+ \times [0, T] \\ \mathcal{B}_+^u(\mathbf{u}_+^{k+1}, \zeta_+^{k+1}) = \mathcal{B}_+^u(\mathbf{u}_-^{k+1}, \zeta_-^{k+1}) \quad \text{sur } \gamma \times [0, T] \\ \mathcal{B}_+^\zeta(\mathbf{u}_+^{k+1}, \zeta_+^{k+1}) = \mathcal{B}_+^\zeta(\mathbf{u}_-^{k+1}, \zeta_-^{k+1}) \quad \text{sur } \gamma \times [0, T] \\ \mathbf{u}_+^{k+1}(., 0) = \bar{\mathbf{U}}_+^{ini} \quad \text{dans } \omega^+ \quad \text{et} \quad \zeta_+^{k+1}(., 0) = \zeta_+^{ini} \quad \text{dans } \omega^+ \end{array} \right.$$

Algorithme 8.1: Algorithme de décomposition de domaine du système de Saint-Venant

où \mathcal{B}_- , \mathcal{B}_+^u et \mathcal{B}_+^ζ désignent respectivement les opérateurs définis par (8.1), (8.3) et (8.4) et \mathcal{L}_{SVL} désigne les opérateurs de Saint-Venant (6.1a) et (6.1b) définis dans le chapitre 6. On a alors le résultat suivant :

Proposition 8.8. *On considère $\lambda > 0$.*

Si $X^0 = (\mathbf{u}_+^0, \zeta_+^0) \in (C(0, T; L^2(\omega^+, \mathbb{R}^2)) \cap L^2(0, T; H^1(\omega^+, \mathbb{R}^2))) \times (L^2(\omega^+ \times (0, T)))$ alors l'algorithme de Schwarz 8.1 est bien défini et les suites $X_-^{k+1} = (\mathbf{u}_-^{k+1}, \zeta_-^{k+1})$ et $X_+^{k+1} = (\mathbf{u}_+^{k+1}, \zeta_+^{k+1})$ définies par cet algorithme convergent respectivement dans $(C(0, T; L^2(\omega^-, \mathbb{R}^2)) \cap L^2(0, T; H^1(\omega^-, \mathbb{R}^2))) \times (L^2(\omega^- \times (0, T)) \cap C(0, T; L^2(\omega^-)))$ et $(C(0, T; L^2(\omega^+, \mathbb{R}^2)) \cap L^2(0, T; H^1(\omega^+, \mathbb{R}^2))) \times (L^2(\omega^+ \times (0, T)) \cap C(0, T; L^2(\omega^+)))$.

Démonstration

Pour montrer le caractère bien posé de l'algorithme, il suffit d'adopter la même démarche que celle considérée dans la section 8.2.

Ensuite, la preuve de convergence est similaire à celle faite dans [32, chapitre 19]. Cependant, comme on considère la vitesse \mathbf{U}_0 non nulle, on a des termes supplémentaires qu'il faut traiter pour conclure quant à la convergence de l'algorithme.

On introduit les erreurs $\tilde{X}_-^{k+1} = X|_{\omega^-} - X_-^{k+1}$ et $\tilde{X}_+^{k+1} = X|_{\omega^+} - X_+^{k+1}$ où X désigne la solution du système de Saint-Venant (8.7) défini dans l'espace tout entier. On a alors :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{L}_{SVL}(\tilde{X}_-^{k+1}) = 0 & \text{dans } \omega^- \times [0, T] \\ \mathcal{B}_-^{ext}(\tilde{X}_-^{k+1}) = 0 & \text{sur } \partial\omega_{ext}^- \times [0, T] \\ \mathcal{B}_-(\tilde{X}_-^{k+1}) = \mathcal{B}_-(\tilde{X}_+^k) & \text{sur } \gamma \times [0, T] \\ \tilde{X}_-^{k+1} = 0 & \text{dans } \omega^- \end{array} \right. \quad (8.35)$$

et

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{SVL}(\tilde{X}_+^{k+1}) = 0 & \text{dans } \omega^+ \times [0, T] \\ \mathcal{B}_+^{ext}(\tilde{X}_+^{k+1}) = 0 & \text{sur } \partial\omega_{ext}^+ \times [0, T] \\ \mathcal{B}_+^u(\tilde{X}_+^{k+1}) = \mathcal{B}_+^u(\tilde{X}_-^{k+1}) & \text{sur } \gamma \times [0, T] \\ \mathcal{B}_+^\zeta(\tilde{X}_+^{k+1}) = \mathcal{B}_+^\zeta(\tilde{X}_-^{k+1}) & \text{sur } \gamma \times [0, T] \\ \tilde{X}_+^{k+1} = 0 & \text{dans } \omega_+ \end{cases} \quad (8.36)$$

Le produit scalaire dans $L^2(\omega^-)$ de la première équation du système (8.35) par $(h\tilde{\mathbf{u}}_-^{k+1}, g\tilde{\zeta}_-^{k+1})^t$ donne :

$$\begin{aligned} h \int_{\omega^-} \partial_t \tilde{\mathbf{u}}_-^{k+1} \cdot \tilde{\mathbf{u}}_-^{k+1} + h \int_{\omega^-} (\mathbf{U}_0 \cdot \nabla_h) \tilde{\mathbf{u}}_-^{k+1} \cdot \tilde{\mathbf{u}}_-^{k+1} - \mu h \int_{\omega^-} \Delta_h \tilde{\mathbf{u}}_-^{k+1} \cdot \tilde{\mathbf{u}}_-^{k+1} + gh \int_{\omega^-} \nabla_h \tilde{\zeta}_-^{k+1} \cdot \tilde{\mathbf{u}}_-^{k+1} + \\ g \int_{\omega^-} \tilde{\zeta}_-^{k+1} \partial_t \tilde{\zeta}_-^{k+1} + gh \int_{\omega^-} \tilde{\zeta}_-^{k+1} \operatorname{div}_h(\tilde{\mathbf{u}}_-^{k+1}) + g \int_{\omega^-} \mathbf{U}_0 \cdot \nabla_h \tilde{\zeta}_-^{k+1} \tilde{\zeta}_-^{k+1} \\ = 0 \end{aligned}$$

En intégrant par parties et en utilisant le fait que $\int_{\omega^-} (\mathbf{U}_0 \cdot \nabla_h) \tilde{\mathbf{u}}_-^{k+1} \cdot \tilde{\mathbf{u}}_-^{k+1} = \frac{u_0}{2} \|\tilde{\mathbf{u}}_-^{k+1}\|_\gamma^2$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(h \|\tilde{\mathbf{u}}_-^{k+1}\|_{\omega^-}^2 + g \|\tilde{\zeta}_-^{k+1}\|_{\omega^-}^2 \right) + \mu h \|\nabla_h \tilde{\mathbf{u}}_-^{k+1}\|_{\omega^-}^2 + g \int_{\omega^-} \mathbf{U}_0 \cdot \nabla_h \tilde{\zeta}_-^{k+1} \tilde{\zeta}_-^{k+1} \\ + \int_\gamma \left(-\mu h \partial_x \tilde{\mathbf{u}}_-^{k+1} + \frac{1}{2} u_0 \tilde{\mathbf{u}}_-^{k+1} + gh \begin{pmatrix} \tilde{\zeta}_-^{k+1} \\ 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \tilde{\mathbf{u}}_-^{k+1} = 0 \end{aligned}$$

Ensuite, grâce aux relations (8.5) et (8.6) on a :

$$\left(-\mu \partial_x \tilde{\mathbf{u}}_-^{k+1} + \frac{1}{2} u_0 \tilde{\mathbf{u}}_-^{k+1} + g \begin{pmatrix} \tilde{\zeta}_-^{k+1} \\ 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \tilde{\mathbf{u}}_-^{k+1} = \frac{1}{4\lambda} \left((\mathcal{B}_+^{u,1})^2 + (\mathcal{B}_+^{u,2})^2 - (\mathcal{B}_-^1)^2 - (\mathcal{B}_-^2)^2 \right) (\tilde{\mathbf{u}}_-^{k+1}, \tilde{\zeta}_-^{k+1})$$

où \mathcal{B}_-^i pour $i = 1, 2$ désigne la i ème coordonnée du vecteur $\mathcal{B}_-(\tilde{\mathbf{u}}_-^{k+1}, \tilde{\zeta}_-^{k+1})$ et $\mathcal{B}_+^{u,i}$ pour $i = 1, 2$ désigne la i ème coordonnée du vecteur $\mathcal{B}_+^u(\tilde{\mathbf{u}}_-^{k+1}, \tilde{\zeta}_-^{k+1})$.

On en déduit que :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(h \|\tilde{\mathbf{u}}_-^{k+1}\|_{\omega^-}^2 + g \|\tilde{\zeta}_-^{k+1}\|_{\omega^-}^2 \right) + \mu h \|\nabla_h \tilde{\mathbf{u}}_-^{k+1}\|_{\omega^-}^2 + \frac{h}{4\lambda} \int_\gamma \left((\mathcal{B}_+^{u,1})^2 + (\mathcal{B}_+^{u,2})^2 \right) (\tilde{\mathbf{u}}_-^{k+1}, \tilde{\zeta}_-^{k+1}) \\ + g \int_{\omega^-} \mathbf{U}_0 \cdot \nabla_h \tilde{\zeta}_-^{k+1} \tilde{\zeta}_-^{k+1} = \frac{h}{4\lambda} \int_\gamma \left((\mathcal{B}_-^1)^2 + (\mathcal{B}_-^2)^2 \right) (\tilde{\mathbf{u}}_-^{k+1}, \tilde{\zeta}_-^{k+1}) \end{aligned}$$

Et d'après la condition aux limites sur γ , on peut modifier le second membre :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(h \|\tilde{\mathbf{u}}_-^{k+1}\|_{\omega^-}^2 + g \|\tilde{\zeta}_-^{k+1}\|_{\omega^-}^2 \right) + \mu h \|\nabla_h \tilde{\mathbf{u}}_-^{k+1}\|_{\omega^-}^2 + \frac{h}{4\lambda} \int_\gamma \left((\mathcal{B}_+^{u,1})^2 + (\mathcal{B}_+^{u,2})^2 \right) (\tilde{\mathbf{u}}_-^{k+1}, \tilde{\zeta}_-^{k+1}) \\ + g \int_{\omega^-} \mathbf{U}_0 \cdot \nabla_h \tilde{\zeta}_-^{k+1} \tilde{\zeta}_-^{k+1} = \frac{h}{4\lambda} \int_\gamma \left((\mathcal{B}_-^1)^2 + (\mathcal{B}_-^2)^2 \right) (\tilde{\mathbf{u}}_+^k, \tilde{\zeta}_+^k) \end{aligned}$$

En utilisant le fait que :

$$\int_{\omega^-} \mathbf{U}_0 \cdot \nabla_h \tilde{\zeta}_-^{k+1} \tilde{\zeta}_-^{k+1} = - \int_{\omega^-} \mathbf{U}_0 \cdot \nabla_h \tilde{\zeta}_-^{k+1} \tilde{\zeta}_-^{k+1} + \int_\gamma u_0 (\tilde{\zeta}_-^{k+1})^2 \quad (\text{intégrations par parties})$$

l'égalité devient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(h \|\tilde{\mathbf{u}}_-^{k+1}\|_{\omega^-}^2 + g \|\tilde{\zeta}_-^{k+1}\|_{\omega^-}^2 \right) + \mu h \|\nabla_h \tilde{\mathbf{u}}_-^{k+1}\|_{\omega^-}^2 + \frac{h}{4\lambda} \int_{\gamma} \left((\mathcal{B}_+^{\mathbf{u},1})^2 + (\mathcal{B}_+^{\mathbf{u},2})^2 \right) (\tilde{\mathbf{u}}_-^{k+1}, \tilde{\zeta}_-^{k+1}) \\ + \frac{g}{2} \int_{\gamma} u_0 (\tilde{\zeta}_-^{k+1})^2 = \frac{h}{4\lambda} \int_{\gamma} ((\mathcal{B}_-^1)^2 + (\mathcal{B}_-^2)^2) (\tilde{\mathbf{u}}_+^k, \tilde{\zeta}_+^k) \end{aligned}$$

En intégrant entre 0 et t pour $t \in [0, T]$ et compte-tenu des conditions initiales, on trouve :

$$\begin{aligned} \frac{h}{2} \|\tilde{\mathbf{u}}_-^{k+1}\|_{\omega^-}^2 + \frac{g}{2} \|\tilde{\zeta}_-^{k+1}\|_{\omega^-}^2 + \mu h \int_0^t \|\nabla_h \tilde{\mathbf{u}}_-^{k+1}\|_{\omega^-}^2 + \frac{h}{4\lambda} \int_0^t \int_{\gamma} \left((\mathcal{B}_+^{\mathbf{u},1})^2 + (\mathcal{B}_+^{\mathbf{u},2})^2 \right) (\tilde{\mathbf{u}}_-^{k+1}, \tilde{\zeta}_-^{k+1}) \\ + \frac{g}{2} \int_0^t \int_{\gamma} u_0 (\tilde{\zeta}_-^{k+1})^2 = \frac{h}{4\lambda} \int_0^t \int_{\gamma} ((\mathcal{B}_-^1)^2 + (\mathcal{B}_-^2)^2) (\tilde{\mathbf{u}}_+^k, \tilde{\zeta}_+^k) \quad (8.37) \end{aligned}$$

De la même façon, on peut établir sur l'autre sous-domaine que :

$$\begin{aligned} \frac{h}{2} \|\tilde{\mathbf{u}}_+^{k+1}\|_{\omega^+}^2 + \frac{g}{2} \|\tilde{\zeta}_+^{k+1}\|_{\omega^+}^2 + \mu h \int_0^t \|\nabla_h \tilde{\mathbf{u}}_+^{k+1}\|_{\omega^+}^2 + \frac{h}{4\lambda} \int_0^t \int_{\gamma} ((\mathcal{B}_-^1)^2 + (\mathcal{B}_-^2)^2) (\tilde{\mathbf{u}}_+^{k+1}, \tilde{\zeta}_+^{k+1}) \\ - \frac{g}{2} \int_0^t \int_{\gamma} u_0 (\tilde{\zeta}_+^{k+1})^2 = \frac{h}{4\lambda} \int_0^t \int_{\gamma} \left((\mathcal{B}_+^{\mathbf{u},1})^2 + (\mathcal{B}_+^{\mathbf{u},2})^2 \right) (\tilde{\mathbf{u}}_-^{k+1}, \tilde{\zeta}_-^{k+1}) \quad (8.38) \end{aligned}$$

En sommant (8.37) et (8.38), on trouve :

$$\begin{aligned} \frac{h}{2} \|\tilde{\mathbf{u}}_-^{k+1}\|_{\omega^-}^2 + \frac{g}{2} \|\tilde{\zeta}_-^{k+1}\|_{\omega^-}^2 + \mu h \int_0^t \|\nabla_h \tilde{\mathbf{u}}_-^{k+1}\|_{\omega^-}^2 + \frac{h}{2} \|\tilde{\mathbf{u}}_+^{k+1}\|_{\omega^+}^2 + \frac{g}{2} \|\tilde{\zeta}_+^{k+1}\|_{\omega^+}^2 \\ + \mu h \int_0^t \|\nabla_h \tilde{\mathbf{u}}_+^{k+1}\|_{\omega^+}^2 + \frac{h}{4\lambda} \int_0^t \int_{\gamma} ((\mathcal{B}_-^1)^2 + (\mathcal{B}_-^2)^2) (\tilde{\mathbf{u}}_+^{k+1}, \tilde{\zeta}_+^{k+1}) \\ = \frac{h}{4\lambda} \int_0^t \int_{\gamma} ((\mathcal{B}_-^1)^2 + (\mathcal{B}_-^2)^2) (\tilde{\mathbf{u}}_+^k, \tilde{\zeta}_+^k) \quad (8.39) \end{aligned}$$

On note dans la suite :

$$\begin{aligned} E^{k+1} &= \frac{h}{2} \|\tilde{\mathbf{u}}_-^{k+1}\|_{\omega^-}^2 + \frac{g}{2} \|\tilde{\zeta}_-^{k+1}\|_{\omega^-}^2 + \mu h \int_0^t \|\nabla_h \tilde{\mathbf{u}}_-^{k+1}\|_{\omega^-}^2 + \frac{h}{2} \|\tilde{\mathbf{u}}_+^{k+1}\|_{\omega^+}^2 + \frac{g}{2} \|\tilde{\zeta}_+^{k+1}\|_{\omega^+}^2 \\ &\quad + \mu h \int_0^t \|\nabla_h \tilde{\mathbf{u}}_+^{k+1}\|_{\omega^+}^2 \end{aligned}$$

et

$$F^{k+1} = \frac{h}{4\lambda} \int_0^t \int_{\gamma} ((\mathcal{B}_-^1)^2 + (\mathcal{B}_-^2)^2) (\tilde{\mathbf{u}}_+^{k+1}, \tilde{\zeta}_+^{k+1})$$

En sommant la relation (8.39) pour tous les $k \in \{0, \dots, N\}$, où $N > 1$, on obtient :

$$\sum_{k=0}^N E^{k+1} + F^{N+1} = F^0$$

Ce qui signifie que la série à termes positif $\sum_{k=0}^N E^{k+1}$ est convergente car elle est majorée par une constante. La suite E^k tend donc vers 0.

On en déduit alors la convergence de \tilde{X}_+^{k+1} et \tilde{X}_-^{k+1} dans les espaces indiqués dans la proposition 8.8. \square

8.3.2 Convergence de l'algorithme de couplage

Après avoir montré la convergence de l'algorithme de décomposition de domaine du système de Saint-Venant, on peut maintenant revenir à la convergence de l'algorithme de couplage 6.1. On a alors le résultat suivant :

Proposition 8.9. *Les suites $(\mathbf{u}^{k+1}, \zeta_-^{k+1})$ et $(\mathbf{U}_h^{k+1}, \zeta_+^{k+1})$ définies par l'algorithme de couplage 6.1 convergent vers $(\mathbf{u}|_{\omega^-}, \zeta|_{\omega^-})$ et $(\mathbf{U}_h^\lambda, \zeta_+^\lambda)$ respectivement dans $(C(0, T; L^2(\omega^-, \mathbb{R}^2)) \cap L^2(0, T; H^1(\omega^-, \mathbb{R}^2))) \times (L^2(\omega^- \times (0, T)) \cap C(0, T; L^2(\omega^-)))$ et $(C(0, T; L^2(\omega^+, \mathbb{R}^2)) \cap L^2(0, T; H^1(\omega^+, \mathbb{R}^2))) \times (L^2(\omega^+ \times (0, T)) \cap C(0, T; L^2(\omega^+)))$, où $\mathbf{u}|_{\omega^-}$ et $\zeta|_{\omega^-}$ désignent la restriction sur ω^- de (\mathbf{u}, ζ) solution du système de Saint-Venant dans l'espace entier. La suite des vitesses barotropes $(\bar{\mathbf{U}}_h^{k+1})_{k \geq 0}$ et la suite $(\zeta_+^{k+1})_{k+1}$ convergent respectivement vers $\mathbf{u}|_{\omega^+}$ et $\zeta|_{\omega^+}$. À convergence, les contraintes physiques (6.13) et (6.14) sont vérifiées.*

Démonstration

Pour montrer la convergence, il suffit d'appliquer le lemme 6.3 du chapitre 6.

Ensuite, $(\mathbf{u}^{k+1}, \zeta_-^{k+1})$ et $(\bar{\mathbf{U}}_h^{k+1}, \zeta_+^{k+1})$ convergent respectivement vers $(\mathbf{u}|_{\omega^-}, \zeta_-)$ et $(\mathbf{u}|_{\omega^+}, \zeta_+)$ où (\mathbf{u}, ζ) désigne la solution du système de Saint-Venant dans l'espace entier. À convergence, on a :

$$\mathbf{u}|_{\omega^-} = \mathbf{u}|_{\omega^+}$$

de même d'après (6.12) on a :

$$\mu \partial_x \mathbf{u}|_{\omega^-} - u_0 \mathbf{u}|_{\omega^-} - g \begin{pmatrix} \zeta_- \\ 0 \end{pmatrix} = \mu \partial_x \mathbf{u}|_{\omega^+} - u_0 \mathbf{u}|_{\omega^+} - g \begin{pmatrix} \zeta_+ \\ 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit que les contraintes physiques (6.13) et (6.14) sont vérifiées. \square

8.4 Vers l'optimisation du taux de convergence

Les opérateurs \mathcal{B}_- et \mathcal{B}_+^u dépendent de λ . Ceci donne un degré de liberté sur lequel on peut jouer pour optimiser le taux de convergence.

On s'intéresse dans la suite à l'étude du taux de convergence en fonction de λ . Pour cela on calcule comme dans le chapitre 7, la transformée de Laplace-Fourier des erreurs $\tilde{X}_-^{k+1} = X|_{\omega^-} - X_-^{k+1}$ et $\tilde{X}_+^{k+1} = X|_{\omega^+} - X_+^{k+1}$, où $X = (\mathbf{u}, \zeta)^t$.

Cette fois, on exprime la transformée de Laplace-Fourier en variables dimensionnelles. Ce qui donne pour le système (8.7) avec des conditions initiales nulles :

$$\begin{cases} -\mu \partial_x^2 \hat{\mathbf{u}} + u_0 \partial_x \hat{\mathbf{u}} + \{s + i\eta v_0 + \mu \eta^2\} \hat{\mathbf{u}} + g \begin{pmatrix} \partial_x \hat{\zeta} \\ i\eta \hat{\zeta} \end{pmatrix} = 0 \\ u_0 \partial_x \hat{\zeta} + (s + i\eta v_0) \hat{\zeta} + h \partial_x \hat{u} + i h \eta \hat{v} = 0 \end{cases} \quad (8.40)$$

Comme dans le chapitre 7, on cherche des solutions sous la forme $\hat{X}(x) = (\hat{\mathbf{u}}(x), \hat{\zeta}(x))^t = \Phi e^{\tilde{\lambda} x}$. Ceci implique la résolution du système linéaire :

$$\mathbf{M}(\tilde{\lambda}) \Phi = 0 \quad (8.41)$$

où la matrice \mathbf{M} est donnée par :

$$\mathbf{M}(\tilde{\lambda}) = \begin{pmatrix} P(\tilde{\lambda}) & 0 & g\tilde{\lambda} \\ 0 & P(\tilde{\lambda}) & i\eta g \\ h\tilde{\lambda} & ih\eta & u_0\tilde{\lambda} + s + i\eta v_0 \end{pmatrix}$$

avec $P(\tilde{\lambda}) = -\mu\tilde{\lambda}^2 + u_0\tilde{\lambda} + s + \mu\tilde{\lambda}^2 + i\eta v_0$.

On note comme dans le chapitre 7, λ_1 et λ_5 les racines à parties réelles positives et λ_2, λ_3 et λ_4 les racines à parties réelles négatives (on omet le signe \sim pour les $\lambda_i, 1 \leq i \leq 5$, maintenant qu'il n'y a plus d'ambiguïté entre les modes propres de $M(\tilde{\lambda})$ et le paramètre de Robin λ).

Les transformées de Laplace-Fourier des erreurs s'écrivent :

$$\begin{cases} \tilde{X}_-^{k+1} = \Phi_+ \exp(x\Lambda_+) \alpha_+^{k+1} \\ \tilde{X}_+^{k+1} = \Phi_- \exp(x\Lambda_-) \alpha_-^{k+1} \end{cases}$$

où

$$\Phi_+ = \begin{pmatrix} i\eta & g\lambda_5 \\ -\lambda_1 & ig\eta \\ 0 & -P(\lambda_5) \end{pmatrix}, \quad \Lambda_+ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \alpha_+^{k+1} = \begin{pmatrix} \alpha_1^{k+1} \\ \alpha_5^{k+1} \end{pmatrix}$$

et

$$\Phi_- = \begin{pmatrix} i\eta & g\lambda_3 & g\lambda_4 \\ -\lambda_2 & ig\eta & ig\eta \\ 0 & -P(\lambda_3) & -P(\lambda_4) \end{pmatrix}, \quad \Lambda_- = \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \alpha_-^{k+1} = \begin{pmatrix} \alpha_2^{k+1} \\ \alpha_3^{k+1} \\ \alpha_4^{k+1} \end{pmatrix}$$

En $x = 0$, les opérateurs \mathcal{B}_- et \mathcal{B}_+^u s'écrivent alors :

$$\begin{cases} \mathcal{B}_-(\tilde{X}_-^{k+1}) = A_1 \alpha_+^{k+1} \\ \mathcal{B}_+^u(\tilde{X}_-^{k+1}) = A_2 \alpha_+^{k+1} \\ \mathcal{B}_-(\tilde{X}_+^{k+1}) = B_1 \alpha_-^{k+1} \\ \mathcal{B}_+^u(\tilde{X}_+^{k+1}) = B_2 \alpha_-^{k+1} \end{cases}$$

où les matrices A_1 , A_2 , B_1 et B_2 sont données par :

$$\begin{aligned} A_1 &= \left([\Phi_+]_{2,2} (\Lambda_+ + \lambda I_2) + g \begin{pmatrix} 0 & P(\lambda_5) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \\ A_2 &= \left([\Phi_+]_{2,2} (-\Lambda_+ + \lambda I_2) - g \begin{pmatrix} 0 & P(\lambda_5) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \\ B_1 &= \left([\Phi_- \Lambda_- \Phi_-^{-1}]_{2,3} + \begin{pmatrix} \lambda & 0 & -g \\ 0 & \lambda & 0 \end{pmatrix} \right) \Phi_- \\ B_2 &= \left(-[\Phi_- \Lambda_- \Phi_-^{-1}]_{2,3} + \begin{pmatrix} \lambda & 0 & g \\ 0 & \lambda & 0 \end{pmatrix} \right) \Phi_- \end{aligned}$$

Les conditions aux limites en $x = 0$ s'écrivent donc :

$$\begin{aligned} A_1 \alpha_+^{k+1} &= B_1 \alpha_-^k \\ B_2 \alpha_-^{k+1} &= A_2 \alpha_+^{k+1} \\ \mathcal{L}_3^- \alpha_-^{k+1} &= \begin{pmatrix} 0 & -P(\lambda_5) \end{pmatrix} \alpha_+^{k+1} = \mathcal{L}_3^+ \alpha_+^{k+1} \end{aligned}$$

où \mathcal{L}_3^- et \mathcal{L}_3^+ désignent respectivement la troisième ligne de la matrice Φ_- et la troisième ligne de la matrice Φ_+ .

On définit les nouvelles matrices :

$$B'_2 = \begin{pmatrix} B_2 \\ \mathcal{L}_3^- \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A'_2 = \begin{pmatrix} A_2 \\ \mathcal{L}_3^+ \end{pmatrix}$$

On a alors

$$\tilde{\alpha}_+^{k+1} = A_1^{-1} B_1 (B'_2)^{-1} A'_2 \tilde{\alpha}_+^k \quad (8.42)$$

Si on note T la matrice $A_1^{-1} B_1 (B'_2)^{-1} A'_2$, le taux de convergence est défini par :

$$\rho = \max(|r_i|^{\frac{1}{2}}, r_i \text{ valeur propre de } TT^*)$$

L'optimisation du taux de convergence de l'algorithme de décomposition de domaine usuel du système de Saint-Venant revient donc à chercher λ qui minimise ρ .

L'expression de la matrice T est compliquée. Il est donc difficile de trouver l'expression exacte du paramètre λ qui minimise le taux de convergence. En revanche, cette valeur peut être approchée numériquement, voir par exemple [7].

En résumé

Dans ce chapitre, on a étudié l'algorithme de couplage avec des conditions de type « Robin généralisées ». On a montré la convergence, dans les espaces appropriés, de l'algorithme de décomposition de domaine usuel du système de Saint-Venant, ce qui a permis de conclure que l'algorithme de couplage 6.1 converge. Plus particulièrement, on montré que $(\mathbf{u}^{k+1}, \zeta_-^{k+1})$ et $(\bar{\mathbf{U}}_h^{k+1}, \zeta_+^{k+1})$ convergent respectivement vers $(\mathbf{u}, \zeta)_{\omega^-}$ et $(\mathbf{u}, \zeta)_{\omega^+}$, où $(\mathbf{u}, \zeta)^t$ désigne la solution du système de Saint-Venant 2-D. La vitesse barocline quant à elle dépend a priori du paramètre

de Robin λ . On a également montré comment exprimer le taux de convergence de l'algorithme en fonction du paramètre de Robin, ce qui permet donc de l'optimiser.

Ce résultat peut être étendu sans difficultés majeures au cas où l'on considère deux paramètres strictement positifs λ_1 et λ_2 différents dans chacune des composantes des opérateurs \mathbf{B}_- et \mathbf{B}_+^u .

Ces résultats ne seront pas testés dans le cadre de ce travail. En revanche, on présentera dans le chapitre suivant une première étude d'un cas test réel de couplage entre le système de Saint-Venant 1-D et les équations de Navier-Stokes 3-D. On présentera un algorithme heuristique, qu'on testera à l'aide des codes Mascaret 1-D et Telemac 3-D développés tous les deux par EDF R&D.

Chapitre 9

Couplage de modèles hydrodynamiques

Dans ce dernier chapitre, on va présenter une application du couplage de modèles de dimensions spatiales hétérogènes qui peut être utilisée dans le cadre de la modélisation fluviale chez EDF. En effet la simulation d'un réseau fluvial complet par les équations de Navier-Stokes 3-D étant beaucoup trop coûteux, les ingénieurs d'EDF utilisent selon la complexité locale de l'écoulement et de la géométrie des modèles de Saint-Venant 1-D et 2-D et restreignent l'usage des équations de Navier-Stokes 3-D aux zones où l'on veut une modélisation plus fine (à proximité des barrages par exemple).

Jusqu'à récemment, EDF réalisait des couplages faibles entre des modèles 1-D et des modèles 2-D, c'est-à-dire avec des échanges d'information dans un seul sens : du modèle qui est en amont vers le modèle qui est en aval.

Récemment, en se basant sur les travaux de l'équipe MOX Politecnico di Milano (voir [33]), EDF a développé un couplage Saint-Venant 1-D/ Saint-Venant 2-D au sens fort (c'est à dire avec échange d'information dans les deux sens entre les modèles) en utilisant les logiciel Mascaret 1-D et Telemac 2-D (voir [29]).

Dans ce chapitre, on va faire une extension de ces travaux pour le couplage Saint-Venant 1-D/ Navier-Stokes 3-D à travers une application simple. Étant donné que l'on va utiliser des modèles non linéaires, l'algorithme que l'on va présenter est un algorithme heuristique sans preuve de convergence. Les conditions de type Robin ne seront pas testées ici. En effet, on ne cherchera pas à accélérer la convergence de l'algorithme de couplage. L'objectif est de démontrer qu'un algorithme itératif de type Schwarz donne des meilleurs résultats qu'un couplage faible et d'exploiter les outils d'EDF afin de mettre en œuvre cet algorithme de couplage.

9.1 Présentation des modèles couplés et des domaines de couplage

9.1.1 Modèle de référence

On considère un écoulement tridimensionnel dans le domaine sous forme de coude présenté dans la figure 9.1. Le mouvement du fluide est régi dans ce cas par les équations de Navier-Stokes 3-D munies des conditions aux limites suivantes : vitesse imposée à l'entrée du domaine

et hauteur d'eau imposée à la sortie du domaine. La section de ce domaine est en forme de trapèze.

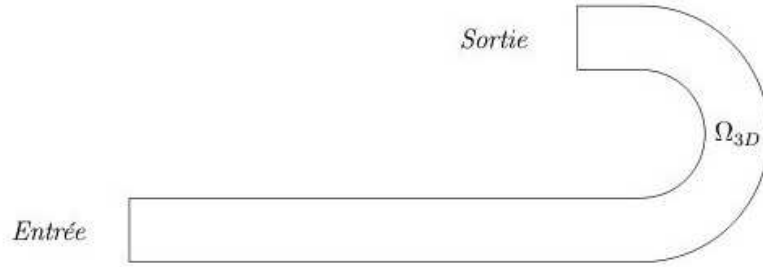


FIGURE 9.1 – Domaine global

On résout donc dans le domaine Ω le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t U + U \partial_x U + V \partial_y U + W \partial_z U - \mu \Delta U + \partial_x p = f_1 & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ \partial_t V + U \partial_x V + V \partial_y V + W \partial_z V - \mu \Delta V + \partial_y p = f_2 & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ \partial_t W + U \partial_x W + V \partial_y W + W \partial_z W - \mu \Delta W + \partial_z p = f_3 & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ \partial_x U + \partial_y V + \partial_z W = 0 & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+ \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (9.1a) \\ (9.1b) \\ (9.1c) \\ (9.1d) \end{array}$$

muni des conditions aux limites suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} (\sigma \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}_1) \boldsymbol{\tau}_1 + (\sigma \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}_2) \boldsymbol{\tau}_2 = k (\mathbf{U} \cdot \boldsymbol{\tau}_1) \boldsymbol{\tau}_1 + k (\mathbf{U} \cdot \boldsymbol{\tau}_2) \boldsymbol{\tau}_2 & \text{au fond} \\ W = 0 & \text{au fond} \\ \partial_t \zeta + \mathbf{U}_h \cdot \nabla_h \zeta - W = 0 & \text{en } z = \zeta(x, y, t) \\ \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur les bords latéraux} \\ \mathbf{U} = \mathbf{U}_d & \text{à l'entrée du domaine} \\ H = H_d & \text{à la sortie du domaine} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (9.2a) \\ (9.2b) \\ (9.2c) \\ (9.2d) \\ (9.2e) \\ (9.2f) \end{array}$$

où H désigne la hauteur d'eau et \mathbf{U} est le vecteur vitesse.

9.1.2 Modèles couplés

Afin de diminuer le coût et le temps de calcul, on propose de remplacer le modèle totalement 3-D par un modèle mixte 1-D/3-D qui consiste à résoudre le système des équations de Navier-Stokes 3-D dans une partie du domaine et le système des équations de Saint-Venant 1-D sur l'autre partie. Un exemple de ce couplage est présenté dans la figure 9.2. On note dans ce cas les interfaces de couplage $\{x = L\}$ pour le modèle 1-D et Γ pour le modèle 3-D. L'entrée du domaine 1-D est positionnée en $\{x = A\}$ et la sortie du domaine 3-D est notée S .

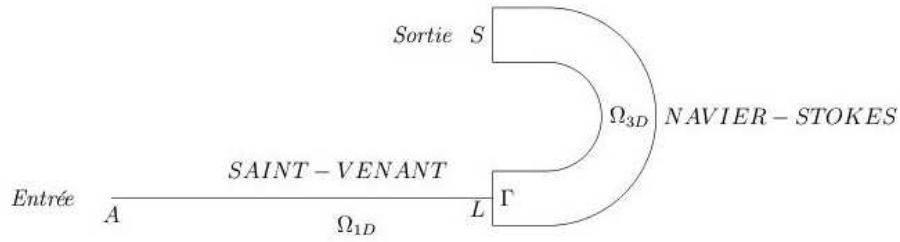


FIGURE 9.2 – Exemple d'un domaine de couplage

Les modèles mathématiques à coupler sont donc :

- Modèle 1-D :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t u + u \partial_x u = -g \partial_x \zeta + \frac{1}{H} \partial_x (\mu H \partial_x u) + \bar{f}_1 & \text{dans } \Omega_{1D} \end{array} \right. \quad (9.3a)$$

$$\partial_t H + u \partial_x H + H \partial_x u = 0 \quad \text{dans } \Omega_{1D} \quad (9.3b)$$

$$\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_d \quad \text{en } x = A \quad (9.3c)$$

où \mathcal{Q} désigne le débit,

- Modèle 3-D :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t U + U \partial_x U + V \partial_y U + W \partial_z U - \mu \Delta U + \partial_x p = f_1 & \text{dans } \Omega_{3D} \times \mathbb{R}^+ \end{array} \right. \quad (9.4a)$$

$$\partial_t V + U \partial_x V + V \partial_y V + W \partial_z V - \mu \Delta V + \partial_y p = f_2 \quad \text{dans } \Omega_{3D} \times \mathbb{R}^+ \quad (9.4b)$$

$$\partial_z p = -g + f_3 \quad \text{dans } \Omega_{3D} \times \mathbb{R}^+ \quad (9.4c)$$

$$\partial_x U + \partial_y V + \partial_z W = 0 \quad \text{dans } \Omega_{3D} \times \mathbb{R}^+ \quad (9.4d)$$

muni des conditions aux limites (9.2a), (9.2b), (9.2c), (9.2d) et (9.2f)

9.1.3 Conditions de transmission

Avant de résoudre le nouveau problème, on commence par préciser la notion de couplage, c'est-à-dire les quantités physiques qu'on cherche à passer d'un modèle à l'autre. Dans le cas du couplage Navier-Stokes 3-D/Saint-Venant 1-D, on cherche à assurer à chaque instant la continuité du débit et de la moyenne de la hauteur d'eau à travers les interfaces $\{x = L\}$ et Γ :

$$\begin{cases} \mathcal{Q}_{1D}(L, t) = \mathcal{Q}_{3D}(L, t) \\ H_{1D}(L, t) = \bar{H}_{3D}(L, t) \end{cases} \quad (9.5)$$

9.2 Algorithme de couplage

Pour résoudre le problème couplé, on propose un algorithme multiplicatif de type Schwarz :

- Pour $t = 0$, phase initialisation

boucle en temps : **Tant que** $t \leq t_{max}$ **Faire** Boucle de Schwarz

À l'étape k ($k \geq 0$) :

Tant que $\|H_3^{k+1,t} - H_3^{k,t}\|_2 \leq \varepsilon$ et $k \leq N_{max}$, **Faire**

résoudre :

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{3D}(\mathbf{U}_t^{k+1}) = F & \text{dans } \Omega_{3D} \\ H_3^{k+1,t} = H_d & \text{sur } S \\ \mathbf{U}_t^{k+1}(L, y, z) = \mathcal{P}(\mathbf{u}_t^k(L)) \end{cases}$$

puis résoudre

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{1D}(u_t^{k+1}) = \bar{F} & \text{dans } \Omega_{1D} \\ \mathcal{Q}_1^{k+1,t}(A) = \mathcal{Q}_d \\ H_1^{k+1,t} = \bar{H}_3^{k+1,t} \end{cases}$$

$k = k + 1$

Fin boucle de Schwarz

$t = t + \Delta t$

Fin boucle en temps

- Pour $t = t_{max}$, phase finalisation.

Algorithme 9.1: Algorithme de Schwarz de couplage multi-dimensionnel

où \mathbf{U}_t désigne le vecteur vitesse 3-D à l'instant t , u_t la vitesse 1-D à l'instant, H_1 et H_3 désignent respectivement la hauteur d'eau du modèle 1-D et du modèle 3-D, \mathcal{Q}_d et H_d sont respectivement le débit imposé à l'entrée du domaine 1-D et la hauteur d'eau imposée à la sortie du modèle 3-D et \mathcal{P} désigne le profil de vitesse imposé à l'entrée du domaines 3-D. En effet, à partir de la

vitesse 1-D on calcule une vitesse 3-D à divergence nulle, qui est normale à la frontière et telle que sa norme soit proportionnelle à $\sqrt{H_3}$. Enfin, t_{max} désigne le temps maximal de simulation, N_{max} le nombre maximal d'itérations et ε un petit paramètre (ici 10^{-6}). Les opérateurs \mathcal{L}_{3D} et \mathcal{L}_{1D} désignent respectivement le système des équations de Navier-Stokes 3-D et le système des équations de Saint-Venant 1-D discrétisés tous les deux en temps.

9.3 Étude numérique du cas test

Dans la suite on présente brièvement les différents codes numériques utilisés pour cette mise en œuvre du couplage entre le système de Saint-Venant 1-D et les équations de Navier-Stokes 3-D.

9.3.1 Outils numériques

Mascaret 1-D

Il s'agit d'un logiciel développé par EDF qui permet de modéliser les écoulements monodimensionnels à surface libre, utilisant la méthode des éléments finis. Il se base sur les équations de Saint-venant. Les équations peuvent être résolues sous forme conservative ou non conservative, et différents régimes sont pris en compte : fluvial ou torrentiel, permanent ou non permanent. Il est utilisé dans le cadre de modélisation des ondes de crues, de risques d'inondations, de rupture de barrages, etc. Pour plus de détails sur ce logiciel, on renvoie le lecteur vers [8].

Telemac 3-D

Telemac est un logiciel développé par EDF permettant de résoudre numériquement les modèles 3-D hydrostatiques et non hydrostatiques à surface libre. Il est basé sur la méthode des éléments finis et utilise pour la coordonnée verticale la transformation sigma classique permettant le suivi de surface (voir [21]). Cette dernière est un cas particulier des méthodes *ALE* (pour arbitrairement lagrangienne eulerienne). On trouve dans la thèse d'A. Decoene [10] tous les aspects théoriques concernant l'utilisation de ces méthodes dans Telemac 3-D.

La discrétisation des équations dans Telemac se fait en utilisant une méthode à pas fractionnaire en temps. Cela se ramène à trois étapes :

1. Résolution d'une équation d'advection.
2. Résolution d'une équation de diffusion.
3. Enfin la résolution d'une équation de pression et de l'équation de continuité.

Pour plus de détails sur ces trois étapes, on renvoie le lecteur vers [10] et [21].

Palm

Il s'agit d'un coupleur dynamique et parallèle développé par le CERFACS (voir [34]). Initialement il était utilisé dans le cadre de l'assimilation de données, mais son champ d'application s'étend désormais à d'autres domaines. Il a servi notamment à mettre en œuvre le couplage Saint-Venant 1-D/Saint-Venant 2D dans [29].

9.3.2 Cas permanent

La première série de tests concerne un cas permanent. On impose à l'entrée du domaine 1-D un débit constant. De même la hauteur d'eau à la sortie du domaine 3-D est constante et ne dépend pas du temps. La hauteur d'eau dans la solution de référence se stabilise au bout d'un certain temps et devient constante.

La longueur totale du bras du coude initial vaut $10.8m$, on fait le couplage avec des coudes intermédiaires dont le bras est de longueur $1.8m$, $2.8m$, etc et les domaines 1-D sont de longueur $9m$, $8m$, etc. Pour la plupart des coudes intermédiaires testés, le couplage aboutit à une stabilisation de la hauteur d'eau au bout d'un certain temps (voir figure 9.3). En revanche, on remarque que si on met l'interface de couplage très proche de l'entrée, la hauteur d'eau explose ou augmente considérablement au bout d'un certain temps (voir figure 9.4).

Sur la figure 9.5, on a représenté le nombre d'itérations nécessaires en fonction du temps avant que l'algorithme converge. On observe qu'à chaque pas de temps, l'algorithme requiert en général peu d'itérations avant de converger (ici 6 itérations au maximum) et qu'à partir d'un certain temps la hauteur d'eau se stabilise et donc on n'a plus besoin d'effectuer d'itérations.

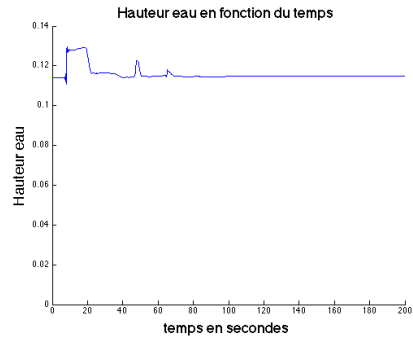
9.3.3 Cas non permanent

Dans cette deuxième série de tests, la hauteur d'eau à la sortie de domaine 3-D est maintenue constante en fonction du temps. En revanche, à l'entrée du domaine 1-D, on impose un débit non permanent dont l'évolution temporelle est présentée dans la figure 9.6. On a eu beaucoup de difficultés à amener les calculs jusqu'au bout. La plupart des simulations s'arrêtent au bout d'un certain temps sans forcément que la hauteur d'eau explose. Seul le cas où le coude a une longueur de $3.8m$ converge (voir figure 9.7). C'est un problème, sans doute essentiellement informatique, sur lequel on continue de travailler afin d'en identifier la cause.

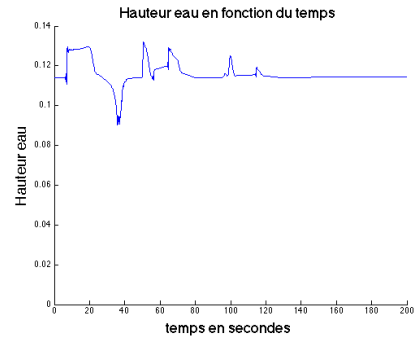
9.4 Conclusion et travail à faire

Dans ce chapitre on a présenté une application simple du couplage multi-dimensionnel entre le système de Saint-Venant 1-D et les équations de Navier-Stokes 3-D. On a donc vu que l'algorithme heuristique proposé converge à chaque pas de temps en peu d'itérations. On a eu cependant plus de difficultés à faire le couplage dans le cas instationnaire. Il reste donc du travail à faire pour comprendre les raisons de cet échec. Dans le futur proche, l'attention sera aussi portée sur les points suivants :

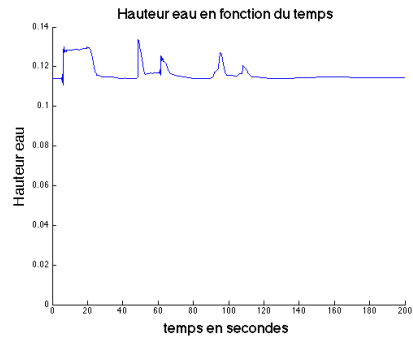
- Étude de l'erreur entre la solution couplée et la solution de référence en fonction de la position de l'interface en norme L^2 ou/et en norme H^1 .
- Tester d'autres conditions aux limites aux interfaces de couplages : plus particulièrement, il serait intéressant de tester des conditions de type « Robin généralisées » et de voir l'influence du choix de paramètre de Robin sur la convergence de l'algorithme.
- Faire le couplage entre le système de Saint-Venant 2-D et les équations de Navier-Stokes 3-D en utilisant Telemac 2-D et Telemac 3-D.



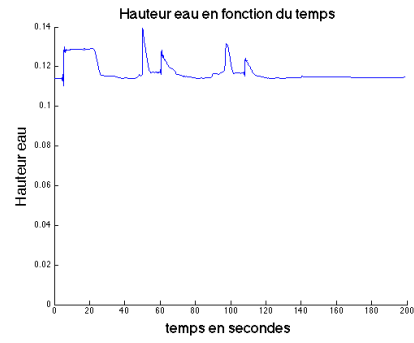
(a) Coude de longueur $1.8m$



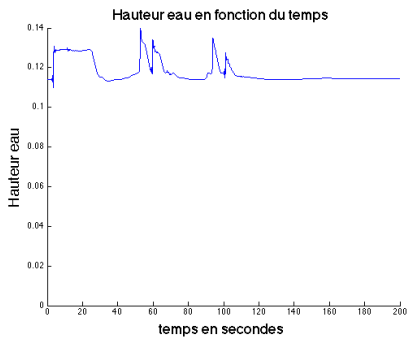
(b) Coude de longueur $2.8m$



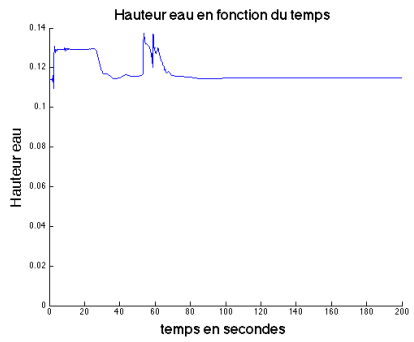
(c) Coude de longueur $3.8m$



(d) Coude de longueur $4.8m$

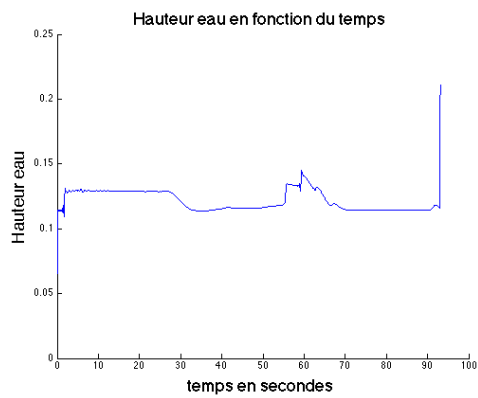


(e) Coude de longueur $6.8m$

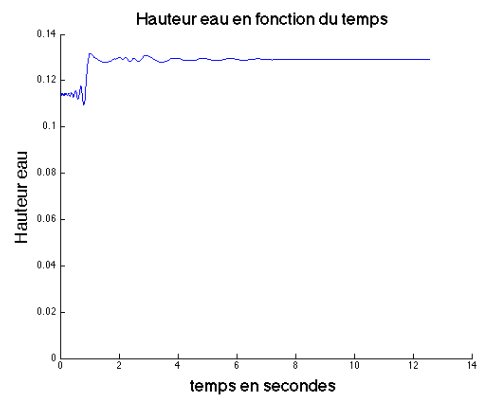


(f) Coude de longueur $7.8m$

FIGURE 9.3 – Hauteur d'eau à convergence de l'algorithme de Schwarz en fonction du temps pour différents coudes intermédiaires testés.

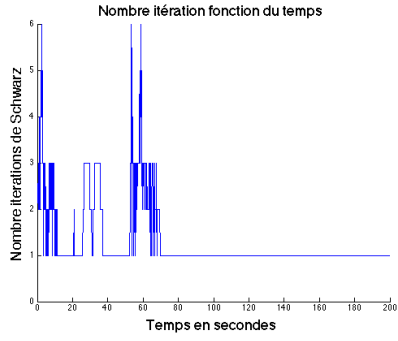


(a) Coude de longueur $8.8m$

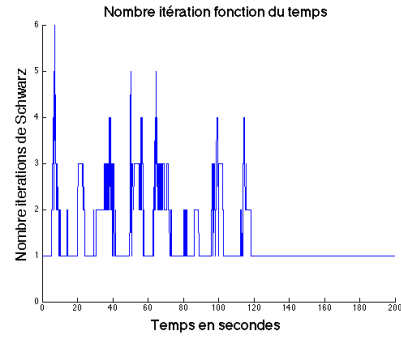


(b) Coude de longueur $9.8m$

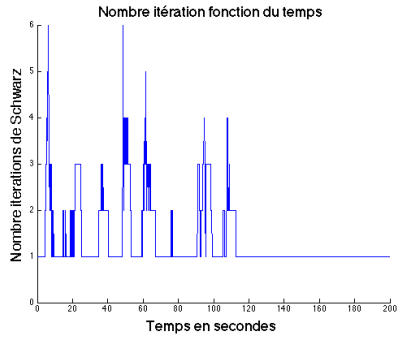
FIGURE 9.4 – Hauteur d'eau à convergence de l'algorithme de Schwarz en fonction du temps pour différents coudes intermédiaires testés et où le calcul échoue.



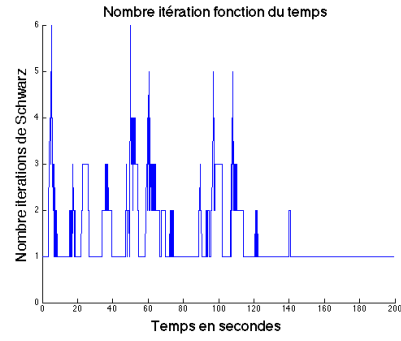
(a) Coude de longueur $1.8m$



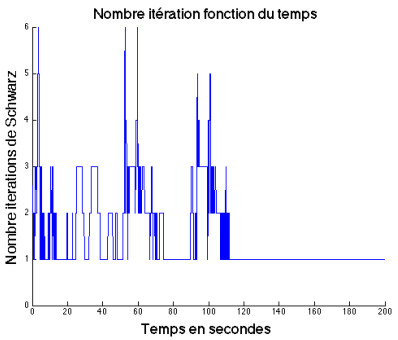
(b) Coude de longueur $2.8m$



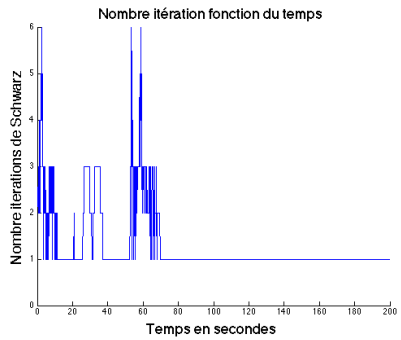
(c) Coude de longueur $3.8m$



(d) Coude de longueur $4.8m$



(e) Coude de longueur $6.8m$



(f) Coude de longueur $7.8m$

FIGURE 9.5 – Nombre d'itérations nécessaires avant convergence de l'algorithme de Schwarz en fonction du temps pour différents coudes intermédiaires testés.

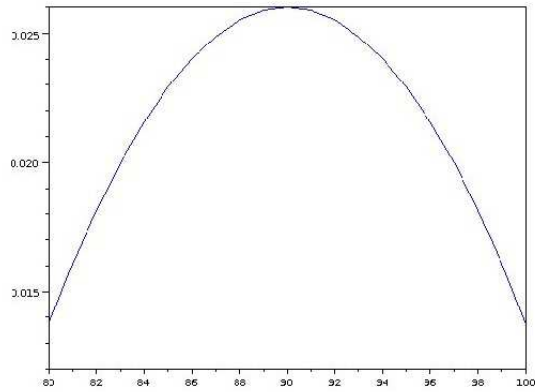


FIGURE 9.6 – Profil du débit imposé à l'entrée du domaine 1-D.

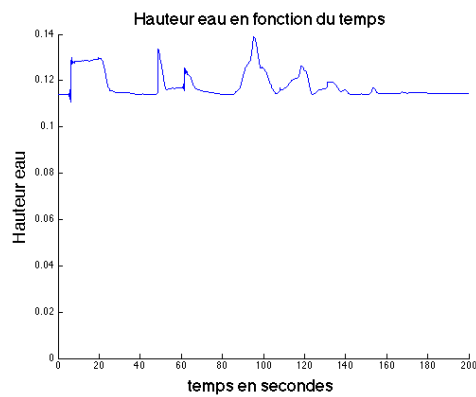


FIGURE 9.7 – Hauteur d'eau à convergence de l'algorithme de Schwarz en fonction du temps dans le cas non permanent pour le coude de longueur $3.8m$.

Conclusions et perspectives

Dans cette thèse, on s'est intéressé tout d'abord à donner un cadre mathématique général au couplage à dimension spatiale hétérogène. Dans la première partie, l'étude d'un cas académique de couplage 1-D/2-D dans le cadre elliptique a permis de mettre en évidence les différentes difficultés liées au changement de dimension spatiale entre les deux modèles. Pour résoudre la première difficulté consistant à définir les opérateurs de restriction et d'extension, on a montré que l'analyse asymptotique servant à dériver le modèle 1-D à partir du modèle 2-D permet aussi de déduire les expressions de ces opérateurs. La définition de la notion de couplage dans ce contexte n'implique souvent que des expressions moyennées sur les interfaces. De ce fait, la solution couplée n'est pas définie d'une façon unique. Ainsi, en mettant en œuvre un algorithme de couplage itératif avec des conditions aux limites de type Robin, on a montré que la solution couplée dépendait du paramètre de Robin. Cependant, grâce encore une fois à l'analyse asymptotique, on a pu contrôler l'erreur commise entre la partie 2-D de la solution couplée et la restriction de la solution globale de référence sur le domaine 2-D. Enfin, on a montré comment rendre la convergence de l'algorithme optimale en exploitant la théorie des opérateurs absorbants exacts utilisée usuellement dans le cadre de la décomposition de domaine.

Dans la deuxième partie de cette thèse, on a généralisé l'étude faite dans la première partie au cas du couplage des systèmes linéaires de Saint-Venant 2-D et de Navier-Stokes hydrostatiques 3-D. En considérant un frottement nul au fond du domaine, on a montré que la convergence de l'algorithme de couplage multi-dimensionnel était équivalente à la convergence de l'algorithme usuel de décomposition de domaine. Afin de rendre la convergence de ce dernier optimale, on a donc adopté la démarche classique consistant à calculer les opérateurs absorbants exacts du système de Saint-Venant. Comme c'est souvent le cas, on a été confronté à la difficulté d'avoir des expressions exploitables en pratique. Les expressions simples que l'on a obtenues ont nécessité des hypothèses très restrictives. On a donc été amené à étudier de l'algorithme de décomposition de domaine du système de Saint-Venant (et donc de l'algorithme de couplage) avec des conditions de type Robin. On a ainsi démontré la convergence de l'algorithme avec ce type de conditions aux limites et on a montré théoriquement comment optimiser le taux de convergence en fonction du paramètre de Robin. On a également prouvé que l'algorithme de couplage multi-dimensionnel était bien défini en utilisant de telles conditions de Robin sur les interfaces de couplage.

Enfin, une première mise en œuvre d'un algorithme de couplage avec les codes EDF Mascaret 1-D et Telemac 3-D a été initiée.

A court terme et afin de compléter ce travail, on pourrait s'intéresser aux points suivants :

- Par analogie avec le travail effectué dans la première partie, il serait intéressant de faire la comparaison de la solution couplée par rapport à la solution globale (celle des équations de

Navier-Stokes hydrostatiques 3-D dans le domaine entier). Ce travail consisterait à trouver une majoration de l'erreur en fonction du rapport d'aspect ε et de la position de l'interface de couplage.

- Les résultats théoriques de convergence de l'algorithme de couplage multi-dimensionnel avec des conditions de type Robin, ainsi que l'optimisation du taux de convergence en fonction du paramètre de Robin, mériteraient d'être testés numériquement.
- Finaliser les tests de couplage utilisant les codes Mascaret 1-D et Telemac 3-D et les généraliser à des cas plus compliqués (géométries plus complexes par exemple).

Ensuite, on note que le résultat permettant de conclure à l'équivalence de la convergence de l'algorithme de couplage des systèmes linéaires de Saint-Venant 2-D et de Navier-Stokes hydrostatiques 3-D avec celle de l'algorithme de décomposition de domaine du système de Saint-Venant est basé sur l'hypothèse de friction nulle au fond. Si ce frottement n'est plus nul, ce qui est souvent le cas quand il s'agit d'applications réelles, cette équivalence n'est plus valable car on ne pourrait plus découpler les modes baroclines du mode barotrope.

Les calculs des opérateurs absorbants exacts et approchés seraient plus complexes. La convergence de l'algorithme de couplage multi-dimensionnel avec des conditions de type Robin serait aussi plus compliquée à obtenir. Ceci est dû essentiellement à l'expression de l'opérateur d'extension : la répartition selon la variable verticale n'est plus uniforme, mais suit généralement une loi polynomiale de degré deux. L'étude de ce cas constitue donc une alternative intéressante.

On s'est intéressé dans le cadre de ce travail, à l'étude du couplage multi-dimensionnel de modèles de même nature mathématique. Il serait donc intéressant d'étudier le couplage dans le cas où les modèles sont différents mathématiquement (comme par exemple le système de Saint-Venant hyperbolique et les équations de Navier-Stokes hydrostatiques) et de voir les impacts de ces différences de nature sur le choix des opérateurs d'interfaces. De même, on n'a étudié ici que le couplage de modèles linéaires. Le cas de modèles non linéaires mériterait aussi d'être étudié. Dans ce cas les calculs des opérateurs absorbants seraient plus complexes. Néanmoins, on pourrait utiliser des conditions de type Robin dans la mesure où l'on pourrait montrer le caractère bien posé des systèmes considérés. Enfin, les modèles qu'on a utilisés sont théoriques et il serait intéressant d'un point de vue pratique de faire le couplage de modèles numériques permettant des applications plus complexes. Dans ce sens, et en continuité de ce travail, une thèse en collaboration avec ARTELIA a été initiée ayant pour objectifs de mettre en œuvre des applications plus réalistes du couplage multi-dimensionnel.

Bibliographie

- [1] E. Audusse, P. Dreyfuss, and B. Merlet. Schwarz wave form relaxation for Primitive equations of the ocean. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 32(5) : 2908–2936, 2010.
- [2] P. Azérard and F. Guillén. Mathematical justification of the hydrostatic approximation in the primitive equations of geophysical fluid dynamics. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 33(4) : 847–859, 2001.
- [3] P.J. Blanco, M. Discacciati, and A. Quarteroni. Modeling dimensionally-heterogeneous problems : analysis, approximation and applications. *Numerische Mathematik*, 119(2) : 299–335, 2011.
- [4] E. Blayo and L. Debreu. Revisiting open boundary conditions from the point of view of characteristic variables. *Elsevier Ocean Modelling*, 9 : 231–252, 2005.
- [5] F. Boyer and P. Fabrie. *Éléments d’analyse pour l’étude de quelques modèles d’écoulements de fluides visqueux incompressibles*. Springer, 2006.
- [6] Y. Çengel. *Introduction to thermodynamics and heat transfer*. McGraw-Hill Higher Education, 1997.
- [7] D. Cherel. *Décomposition de domaine pour des systèmes issus des équations de Navier-Stokes*. PhD thesis, Université de Grenoble, 2012.
- [8] EDF R & D. Mascaret v7.1 note de principe.
- [9] R. Dautray and J-L. Lions. *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology, Volume 5 Evolution Problems I*. Springer, 1999.
- [10] A. Decoene. *Modèle hydrostatique pour les écoulements à surface libre tridimensionnels et schémas numériques*. PhD thesis, Université Paris 6, 2006.
- [11] L. Formaggia, J. F. Gerbeau, F. Nobile, and A. Quarteroni. On the coupling of 3D and 1D Navier-Stokes equations for flows problem in compliant vessel. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191(6-7) : 561–582, December 2001.
- [12] L. Formaggia, J. F. Gerbeau, F. Nobile, and A. Quarteroni. Numerical treatment of defective boundary conditions for the Navier-Stokes equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 40(1) : 376–401, 2002.
- [13] M. J. Gander. Optimized Schwarz Methods. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 44(2) : 699–731, 2006.
- [14] M. J. Gander. Schwarz methods over the course of time. *Electronic Transactions on Numerical Analysis*, 31 : 228–255, 2008.
- [15] M. J. Gander and L. Halpern. Méthodes de relaxation d’ondes pour l’équation de la chaleur en dimension 1. *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences*, 336 : 519–524, 2003.

- [16] M. J. Gander, L. Halpern, and F. Nataf. Optimal convergence for overlapping and non-overlapping Schwarz waveform relaxation. In *The Eleventh International Conference on Domain Decomposition Methods (London, 1998)*, pages 27–36, 1999.
- [17] J.-F. Gerbeau and B. Perthame. Derivation of Viscous Saint-Venant System for Laminar Shallow Water; Numerical Validation. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 1(1) : 89–102, February 2001.
- [18] E. Godlewski and P.-A. Raviart. *Hyperbolic Systems of Conservation Laws*. Ellipses, Mathématiques et Applications, 1991.
- [19] L. Halpern. Artificial boundary conditions for incompletely parabolic perturbations of hyperbolic systems. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 22(5) : 1256–1283, 1991.
- [20] F. Hecht. New development in freefem++. *Journal of Numerical Mathematics*, 20(3-4) : 251–265, 2012.
- [21] J.-M. Hervouet. *Hydrodynamics of free surface flows, modelling with the finite element method*. Wiley, 2007.
- [22] J.G. Heywood, R. Rannacher, and S. Turek. Artificial boundaries and flux and pressure conditions for the incompressible Navier-Stokes equations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 22(5) : 325–352, March 1996.
- [23] C. Japhet and F. Nataf. *The best interface conditions for domain decomposition methods : absorbing boundary conditions* In *Absorbing boundaries and layers*, pages 348–373. Absorbing Boundaries and Layers, Domain Decomposition Methods. Nova Science Publishers, 2001.
- [24] J. Leiva, P. Blanco, and G. Buscaglia. Iterative strong coupling of dimensionally-heterogeneous models. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 81(12) : 1558–1580, March 2010.
- [25] J. Leiva, P. Blanco, and G. Buscaglia. Partitioned analysis for dimensionally-heterogeneous hydraulic networks. *SIAM Multiscale Modeling and Simulation*, 9(2) : 872–903, 2011.
- [26] P.-L. Lions. On the Schwarz alternating method. I. In SIAM, editor, *International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations*, pages 1–42, 1988.
- [27] P.-L. Lions. On the Schwarz alternating method. III. A variant for nonoverlapping subdomains. In SIAM, editor, *Third International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations*, pages 202–223, 1990.
- [28] C. Lucas. *Effets de petites échelles, du tenseur des contraintes, des conditions au fond et à la surface sur les équations de Saint-Venant*. PhD thesis, Université Joseph Fourier-Grenoble I, 2007.
- [29] N. Malleron, F. Zaoui, N. Goutal, and T. Morel. On the use of a high-performance framework for efficient model coupling in hydroinformatics. *Environmental Modelling and Software*, 26 : 1747–1758, 2011.
- [30] F. Marche. *Theoretical and Numerical Study of Shallow Water Models. Applications to Nearshore Hydrodynamics*. PhD thesis, Université Bordeaux 1, 2005.
- [31] J. Marin and J. Monnier. Superposition of local zoom models and simultaneous calibration for 1D-2D shallow water flows. *Mathematics and Computers in Simulation*, 80(3), November 2009.

- [32] V. Martin. *Méthodes de décomposition de domaines de type relaxation d'ondes pour des équations de l'océanographie*. PhD thesis, Université Paris 13, 2003.
- [33] E. Miglio, S. Perotto, and F. Saleri. Model coupling techniques for free-surface flow problems : Part I. *Nonlinear Analysis*, 63 : 1885–18896, 2005.
- [34] T. Morel, A. Thévenin, and A. Piacentini. Coupleur o-palm version 4.0.0, manuel utilisateur et de formation. Technical report, CERFACS/ Global Change and Climate Modelling Team Novembr, 2010.
- [35] G. P. Panasenko. Method of Asymptotic Partial Decomposition of Domain. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 8(1) : 139–156, 1998.
- [36] M. Petcu, R. Temam, and M. Ziane. *Mathematical problems for the primitive equations with viscosity*, pages 348–373. Handbook of Numerical Analysis. Special Issue on Some Mathematical Problems in Geophysical Fluid Dynamic. Elsevier, 2008.
- [37] S. Poirier. Nouvelle méthode de résolution des équations du 3ème degré, 2003.
- [38] A. Quarteroni and A. Valli. *Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations*. Oxford Science Publications, Numerical Mathematics and Scientific Computation, 2005.
- [39] A. Rousseau. *Etudes théoriques et numériques des équations primitives de l'océan sans viscosité*. PhD thesis, Université Paris XI Orsay, 2005.
- [40] A. Rousseau, R. Temam, and J. Tribbia. Boundary value problems for the inviscid primitive equations in limited domain. In Philippe G. Ciarlet, Roger Temam, and Joe Tribbia, editors, *Computational Methods for the Atmosphere and the Oceans*, volume 14 of *Handbook of Numerical Analysis*, pages 481–576. Elsevier, November 2008.
- [41] H.A Schwarz. Über einige Abbildungsaufgaben. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 11 : 65–83, 1869.
- [42] J. C. Strikwerda. Initial boundary value problems for incompletely parabolic systems,. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 30(6) : 797–822, 1977.